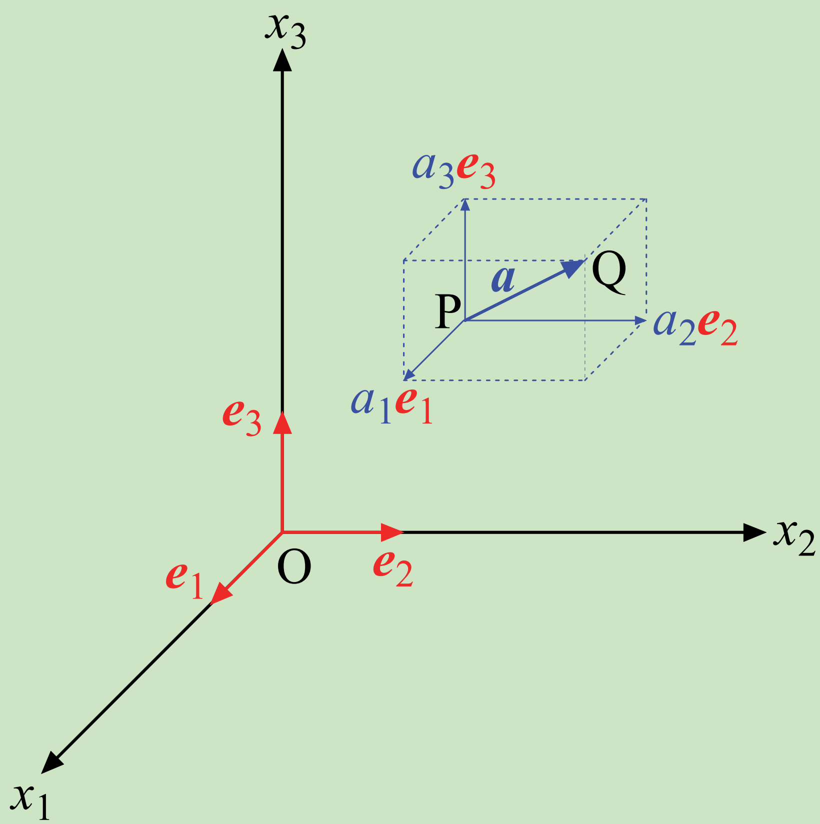
ベクトル



inner product

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

outer product

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

tensor product

$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$

gradient

$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{a}$

divergence

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$

rotation

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$

ベクトル

ベクトルとは，大きさと向きを持った量．

a or $|\boldsymbol{a}|$

基本ベクトル：各軸の正の向きに向かう単位ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

基本ベクトル

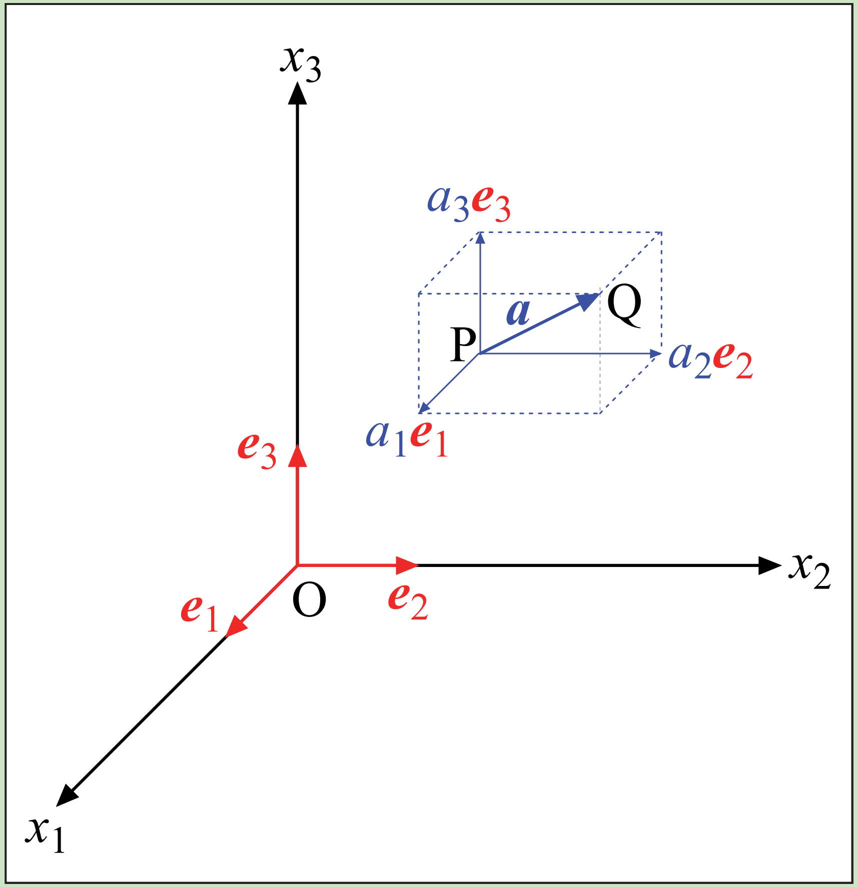
$$\boldsymbol{a} = \boxed{a_1}\boldsymbol{e}_1 + \boxed{a_2}\boldsymbol{e}_2 + \boxed{a_3}\boldsymbol{e}_3$$

成分

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ a

$$a^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2$$
$$= a_i a_i$$

右手系の直交デカルト座標



スカラー積（内積）

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{cases} ab & （\boldsymbol{a}\text{ と }\boldsymbol{b}\text{ が平行なとき}） \\ 0 & （\boldsymbol{a}\text{ と }\boldsymbol{b}\text{ が直交するとき}） \end{cases}$$

スカラー積（内積）

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boxed{ab\cos\theta}$$

スカラー

（θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角，$0 \leqq \theta \leqq \pi$）

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

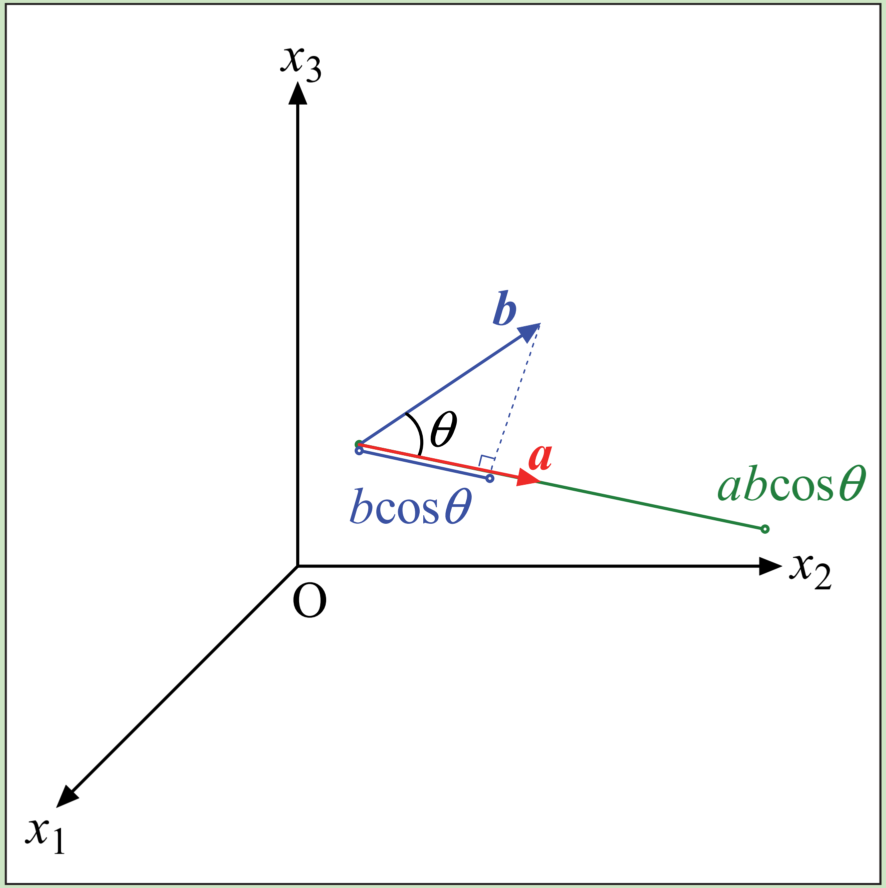
交換法則

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

分配法則

$$(c\boldsymbol{a})\cdot(d\boldsymbol{b}) = (cd)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

スカラー倍



ベクトル積（外積）

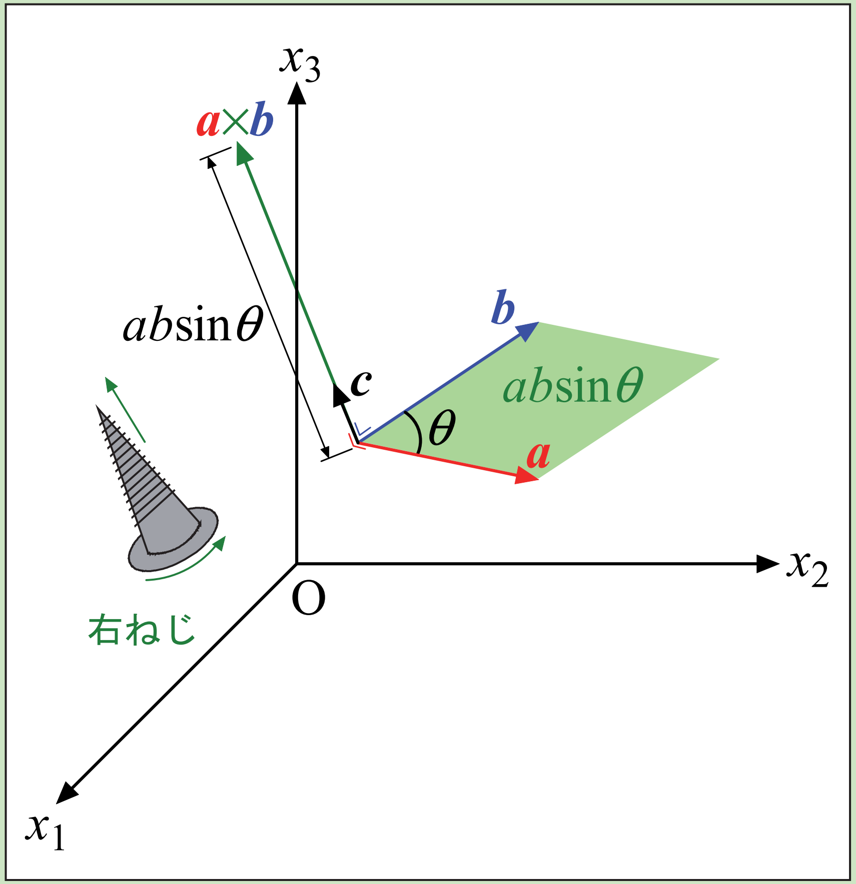
ベクトル

ベクトル積（外積）

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=ab\sin\theta\,\boldsymbol{c}\qquad\left(|\boldsymbol{c}|=1\right)$$

（θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角，$0\leqq\theta\leqq\pi$）

- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交している．
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，右手系をなす．
- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の大きさは，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積に等しい



$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

~~交換法則~~

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

~~結合法則~~

$$(c\boldsymbol{a})\times(d\boldsymbol{b})=(cd)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

スカラー倍

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$

分配法則

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\begin{cases}0 & \text{（}\boldsymbol{a}\text{ と }\boldsymbol{b}\text{ が平行なとき）}\\ ab & \text{（}\boldsymbol{a}\text{ と }\boldsymbol{b}\text{ が直交するとき）}\end{cases}$$

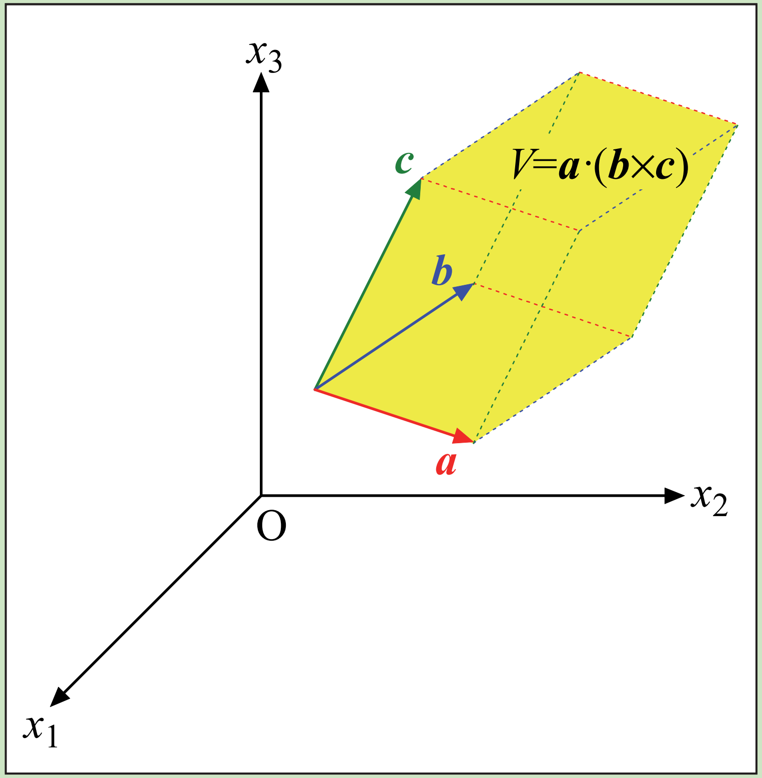
スカラー３重積

スカラー３重積

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) \\ &= \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$



スカラー３重積は，ベクトル$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が作る平行６面体の体積Vに等しい．ただし，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$が左手系となる場合は，値が負となる.

ベクトル３重積

ベクトル３重積

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

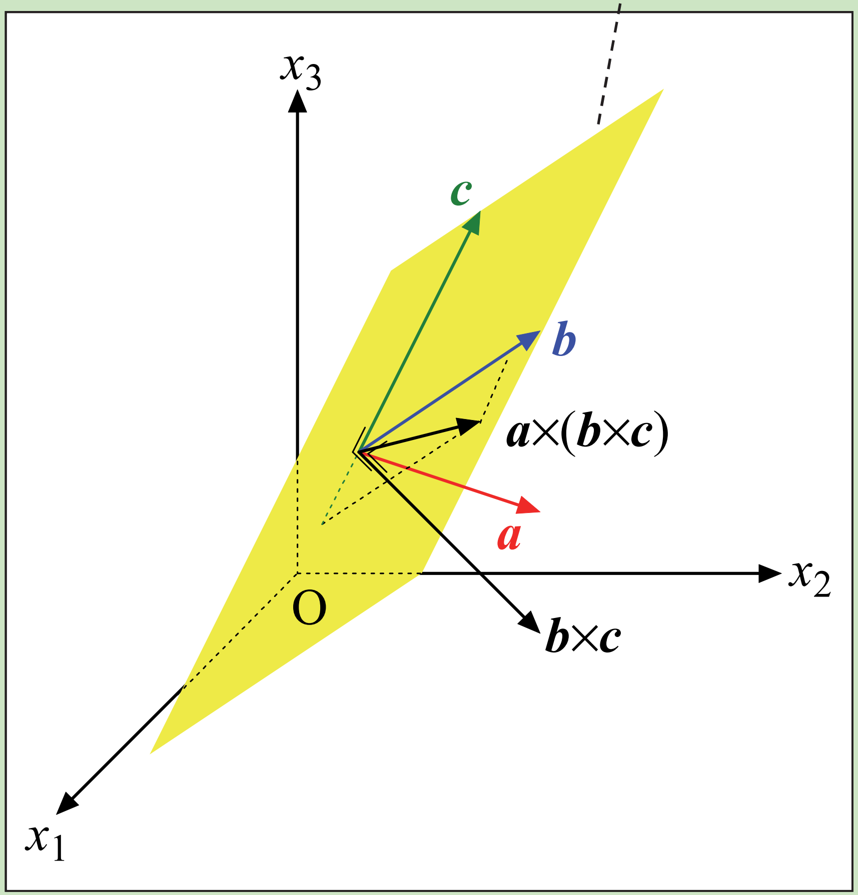
$$\boxed{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}\neq\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}}$$ ~~結合法則~~

ベクトル $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ を含む平面上にあるベクトル

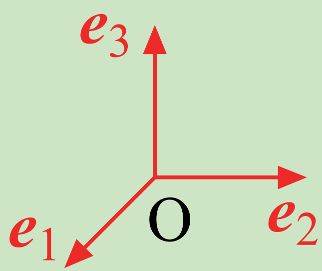
ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

ベクトル $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ を含む平面



基本ベクトル間の関係（スカラー積とベクトル積）



スカラー積

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1, \quad \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1, \quad \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1, \\
&\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0, \quad \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0, \quad \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0, \\
&\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0, \quad \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0, \quad \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0
\end{aligned}$$

ベクトル積

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = e_{ijk} \boldsymbol{e}_k$$

置換記号

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, \\
&\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2, \\
&\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

総和規約を用いた表現（スカラー積とベクトル積）

スカラー積

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(b_j\boldsymbol{e}_j) \\
&= a_i b_j \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \\
&= a_i b_j \delta_{ij} \\
&= a_i b_i
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\theta$$

ベクトル積

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_i\boldsymbol{e}_i)\times(b_j\boldsymbol{e}_j) \\
&= a_i b_j \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j \\
&= a_i b_j e_{ijk}\,\boldsymbol{e}_k
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = ab\sin\theta\,\boldsymbol{c} \qquad (|\boldsymbol{c}|=1)$$

行列を用いた表現（スカラー積とベクトル積）

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

スカラー積

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= a_i b_i \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta$$

ベクトル積

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= a_i b_j e_{ijk} \boldsymbol{e}_k \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

形式的な行列式
表現

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = ab\sin\theta\, \boldsymbol{c} \quad \left(|\boldsymbol{c}| = 1 \right)$$

テンソル積（直積）

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

テンソル積

テンソル

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=[a_i b_j]$$

$$=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a})^T}$$ ~~交換法則~~

$$\boxed{(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\otimes(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c})}$$ 結合法則

$$\boxed{\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{c}&=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}\otimes(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})&=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}\end{aligned}}$$ 分配法則

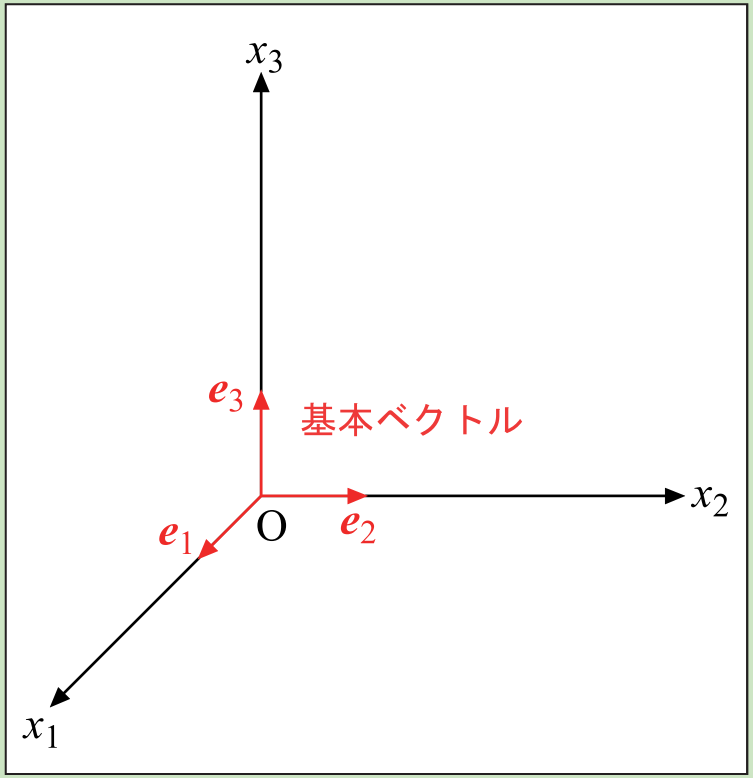
$$\boxed{(c\boldsymbol{a})\otimes(d\boldsymbol{b})=(cd)\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}}$$ スカラー倍

ダイアド：ベクトルから $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$ という形で作られた2階のテンソル

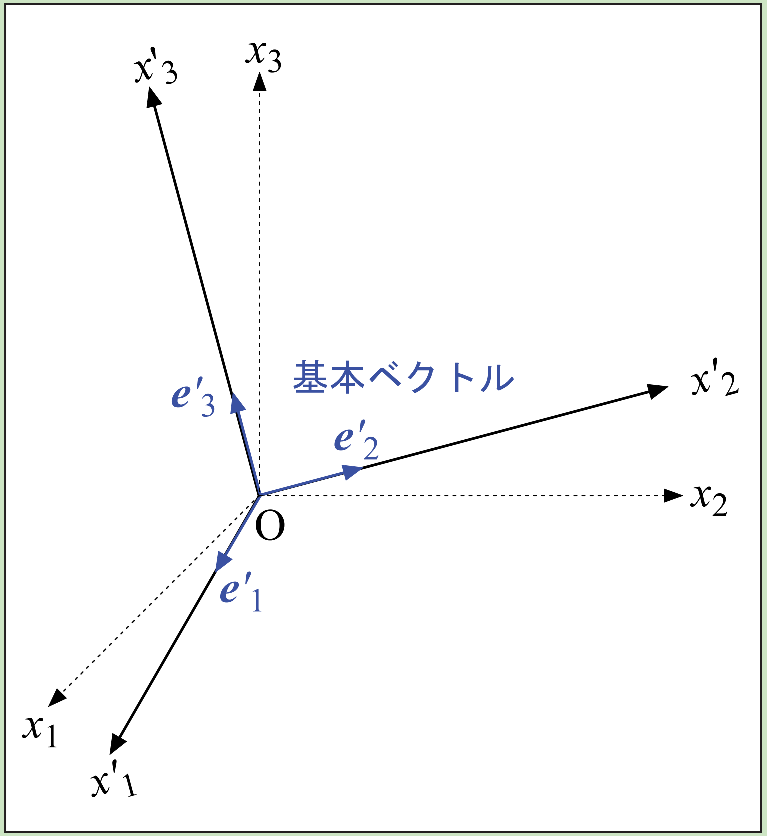
（ダイアドはテンソルの一種であるが，テンソルがすべてダイアドで表されるとは限らない．2階のテンソルは9成分であるのに対し，2つのベクトルの成分を合わせると，3成分×2の6成分．ダイアドは，$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$という形で表される特殊なテンソル．）

座標変換

直交デカルト座標系　(O - x_1, x_2, x_3)

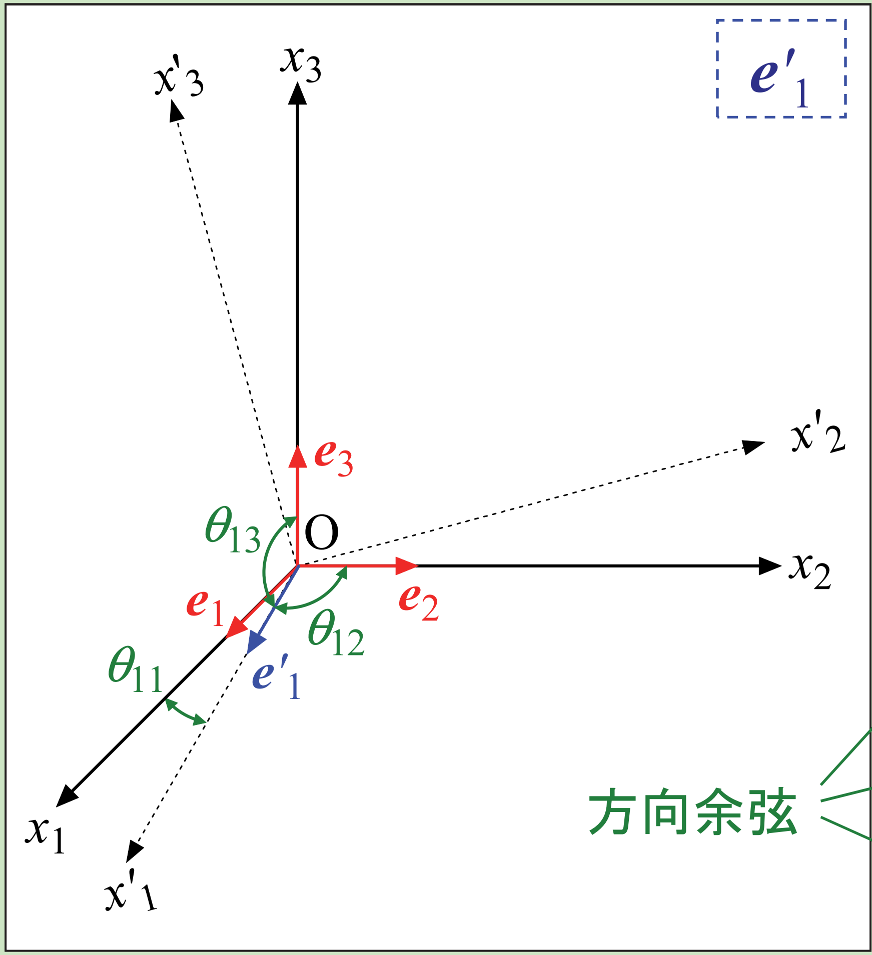


直交デカルト座標系　(O − x'_1, x'_2, x'_3)



座標変換における基本ベクトル間の関係（その１）

$(\mathrm{O}$ - $x_1, x_2, x_3)$ から $(\mathrm{O} - x'_1, x'_2, x'_3)$ への座標変換



新しい座標系における基本ベクトル

元の座標系における基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}'_1 = Q_{11}\boldsymbol{e}_1 + Q_{12}\boldsymbol{e}_2 + Q_{13}\boldsymbol{e}_3$$

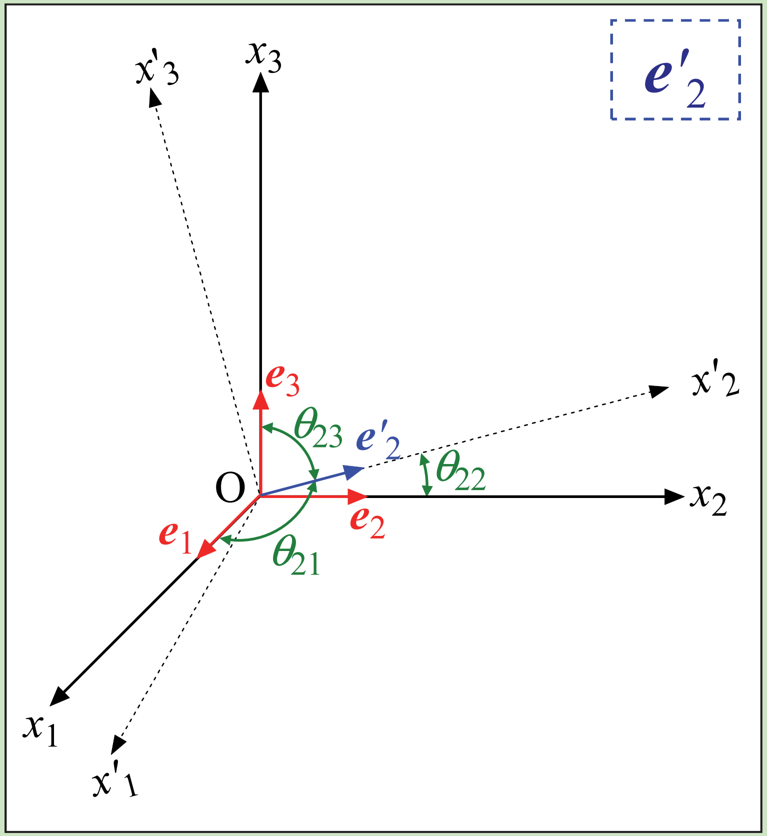
$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 &= Q_{11}\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + Q_{12}\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + Q_{13}\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ &= Q_{11} = \cos\theta_{11}\end{aligned}$$

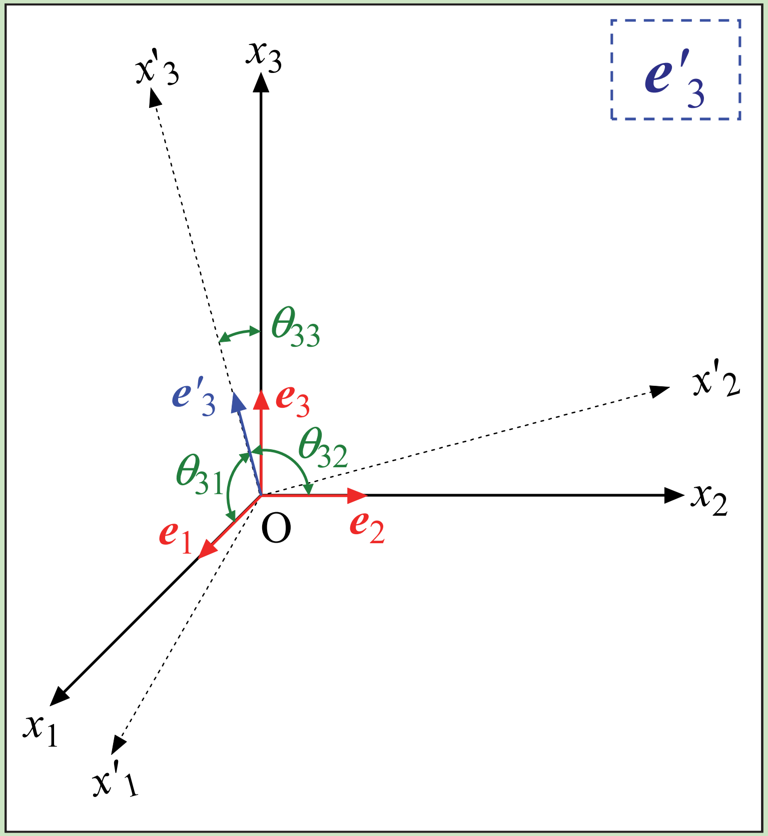
$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= Q_{11}\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + Q_{12}\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ &\quad + Q_{13}\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ &= Q_{12} = \cos\theta_{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 &= Q_{11}\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 + Q_{12}\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ &\quad + Q_{13}\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ &= Q_{13} = \cos\theta_{13}\end{aligned}$$

座標変換における基本ベクトル間の関係（その２）

$(\mathrm{O} - x_1, x_2, x_3)$ から $(\mathrm{O} - x'_1, x'_2, x'_3)$ への座標変換





$$\boldsymbol{e}'_2 = Q_{21}\boldsymbol{e}_1 + Q_{22}\boldsymbol{e}_2 + Q_{23}\boldsymbol{e}_3$$
$$\left(= \cos\theta_{21}\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cos\theta_{23}\boldsymbol{e}_3\right)$$

$$\boldsymbol{e}'_3 = Q_{31}\boldsymbol{e}_1 + Q_{32}\boldsymbol{e}_2 + Q_{33}\boldsymbol{e}_3$$
$$\left(= \cos\theta_{31}\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta_{32}\boldsymbol{e}_2 + \cos\theta_{33}\boldsymbol{e}_3\right)$$

座標変換における基本ベクトル間の関係（その３）

$(\mathrm{O} - x_1, x_2, x_3)$ から $(\mathrm{O} - x'_1, x'_2, x'_3)$ への座標変換

直交行列

$\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij}$ を使って証明される

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}'_i = Q_{ij} \boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}$$

形式的な行列表現（行列の成分がベクトル）

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Q}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Q}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

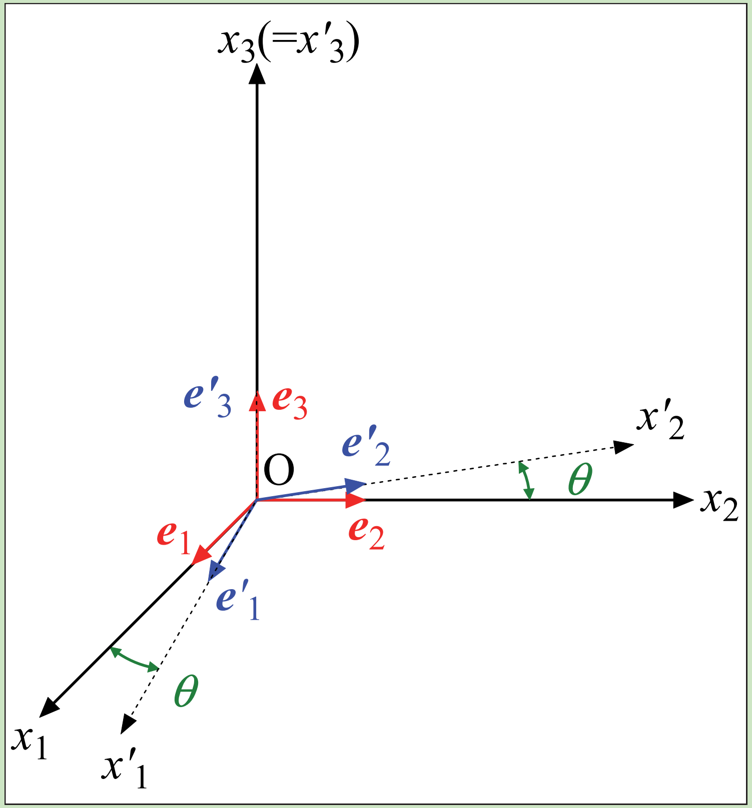
転置関係

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_i = Q_{ji} \boldsymbol{e}'_j$$

座標変換の例（x_3軸回りの回転，その１）

x_3 軸回りの回転に関する座標変換



座標系をx_3軸回りに角度θだけ
回転させる座標変換

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

後ろの添字（2）が示す元の座標系の基本ベクトルe_2から，前の添字（1）が示す変換後の座標系における基本ベクトルe'_1 を見たときの角度

座標軸間の角度関係

$$\theta_{11} = \theta \qquad \theta_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta \qquad \theta_{13} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{21} = \frac{\pi}{2} + \theta \qquad \theta_{22} = \theta \qquad \theta_{23} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{31} = \frac{\pi}{2} \qquad \theta_{32} = \frac{\pi}{2} \qquad \theta_{33} = 0$$

座標変換の例（x_3軸回りの回転，その２）

$$Q_{11} = \cos\theta_{11} = \cos\theta$$

$$Q_{12} = \cos\theta_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$Q_{13} = \cos\theta_{13} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$Q_{21} = \cos\theta_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$Q_{22} = \cos\theta_{22} = \cos\theta$$

$$Q_{23} = \cos\theta_{23} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$Q_{31} = \cos\theta_{31} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$Q_{32} = \cos\theta_{32} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$Q_{33} = \cos\theta_{33} = \cos 0 = 1$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

座標変換における座標間の関係

(O - x_1, x_2, x_3) から (O – x'_1, x'_2, x'_3) への座標変換

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}'_i = Q_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + x'_3\boldsymbol{e}'_3 \\ &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \\ &= x_1\left(Q_{11}\boldsymbol{e}'_1 + Q_{21}\boldsymbol{e}'_2 + Q_{31}\boldsymbol{e}'_3\right) \\ &\quad + x_2\left(Q_{12}\boldsymbol{e}'_1 + Q_{22}\boldsymbol{e}'_2 + Q_{32}\boldsymbol{e}'_3\right) \\ &\quad + x_3\left(Q_{13}\boldsymbol{e}'_1 + Q_{23}\boldsymbol{e}'_2 + Q_{33}\boldsymbol{e}'_3\right) \end{aligned}$$

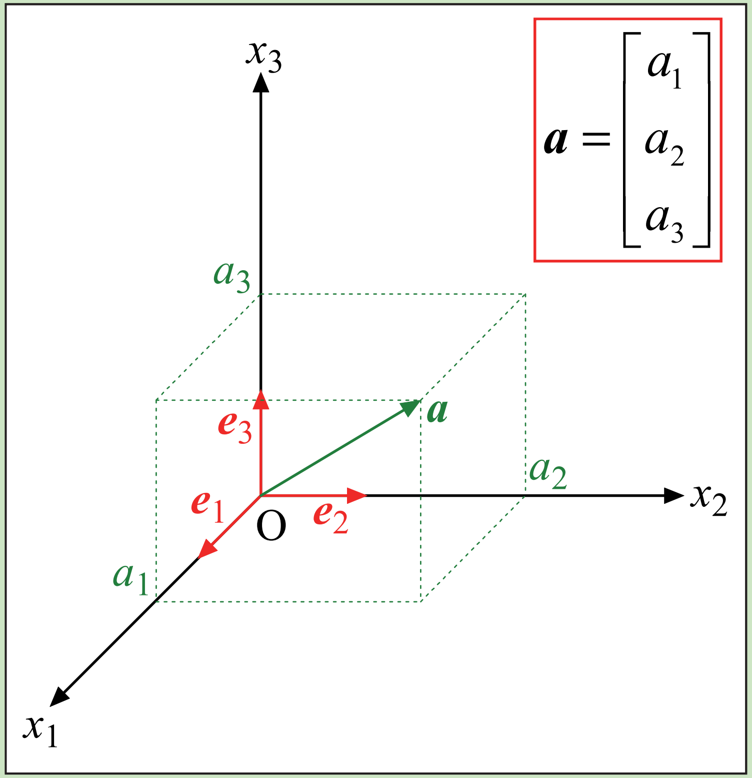
$$\boldsymbol{e}_i = Q_{ji}\boldsymbol{e}'_j$$

$$Q_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

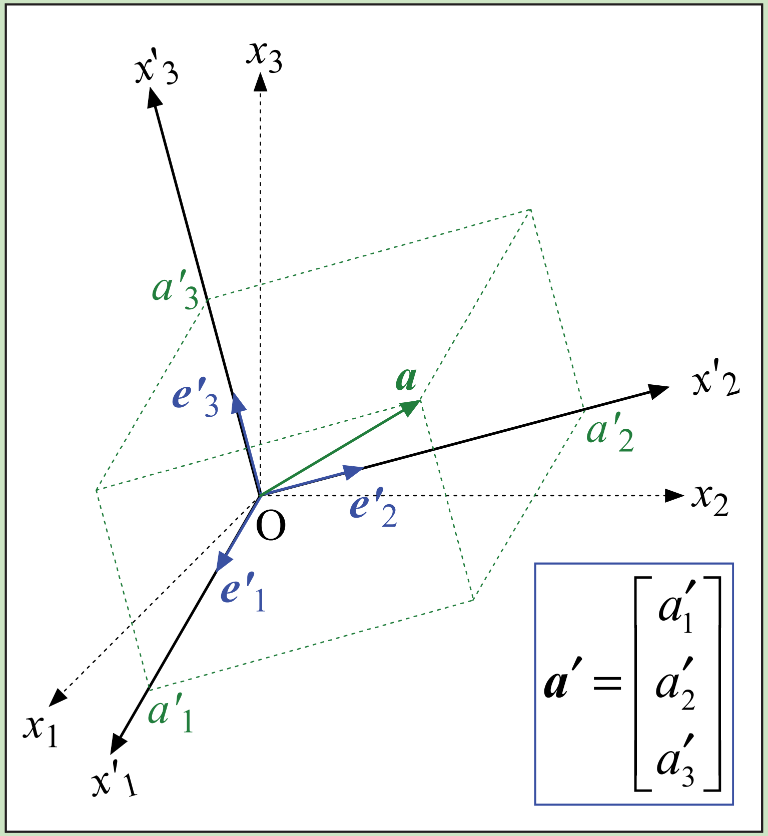
$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x'_i = Q_{ij}x_j$$

座標変換とベクトル（ベクトルの定義）



座標変換



$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

ベクトルの定義

$$a'_i = Q_{ij} a_j$$

微分演算子ナブラ（ハミルトンの演算子）

微分演算子：スカラー関数やベクトル関数を微分する演算を表すもの．右側に演算される関数が来て初めて実際的な意味を持つ．

微分演算子ナブラ

$$\nabla = \boxed{\boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}}$$

$$= \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

形式的に$\partial/\partial x_i$ をx_i軸方向のベクトルの成分として取り扱う

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

使用例

$$\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \left(= a_{,i} \boldsymbol{e}_i \right)$$

$$\nabla a = \left(\boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) a$$

$$= \left(\boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) a$$

$$= \frac{\partial a}{\partial x_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} \boldsymbol{e}_3$$

$$= \begin{bmatrix} \nabla_1 a \\ \nabla_2 a \\ \nabla_3 a \end{bmatrix}$$

微分演算子∇と座標変換

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

座標変換 ⇒

$$\nabla' = \boldsymbol{e}_1' \frac{\partial}{\partial x_1'} + \boldsymbol{e}_2' \frac{\partial}{\partial x_2'} + \boldsymbol{e}_3' \frac{\partial}{\partial x_3'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1'} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_1'} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1'} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1'}$$

$$= Q_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + Q_{12}\frac{\partial}{\partial x_2} + Q_{13}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

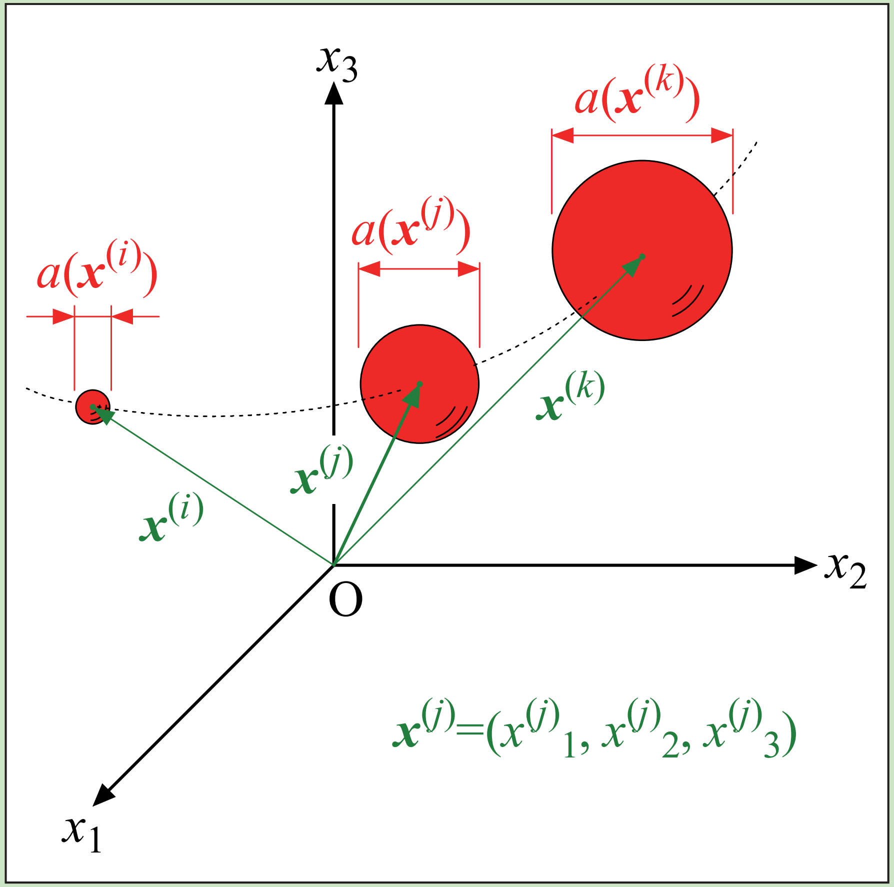
$$\underbrace{\nabla_1' = Q_{1i}\frac{\partial}{\partial x_i} = Q_{1i}\nabla_i, \nabla_2' = Q_{2j}\frac{\partial}{\partial x_j} = Q_{2j}\nabla_j, \nabla_3' = Q_{3k}\frac{\partial}{\partial x_k} = Q_{3k}\nabla_k}_{\boxed{\nabla_p' = Q_{pq}\nabla_q}}$$

微分演算子∇も座標変換に伴い通常のベクトルと同じように変換される.

スカラー場

スカラー場

空間の各点 (x_1, x_2, x_3) にスカラー関数 $a(x_1, x_2, x_3)$ $(=a(\boldsymbol{x}))$ が与えられている場.

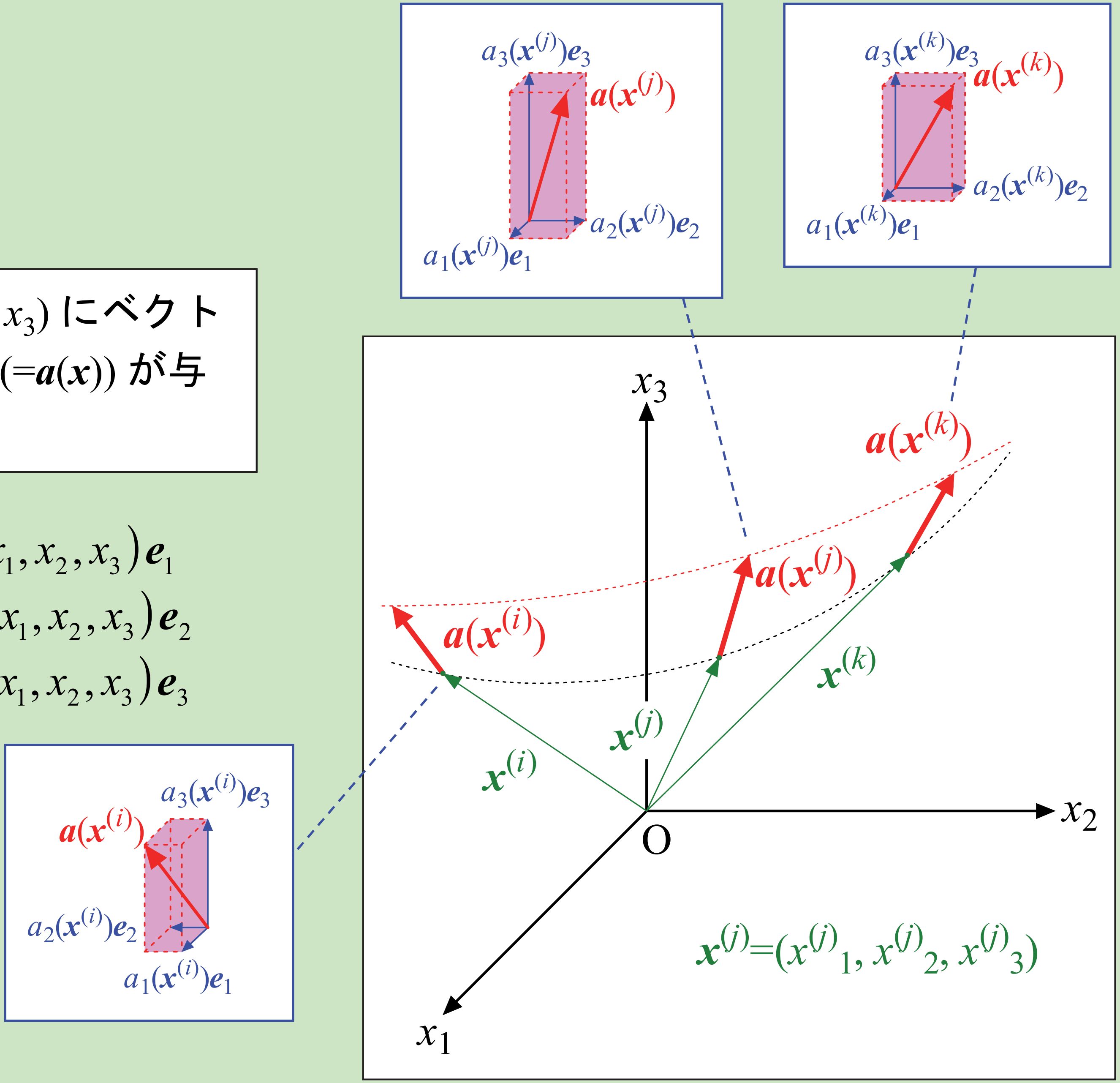


ベクトル場

ベクトル場

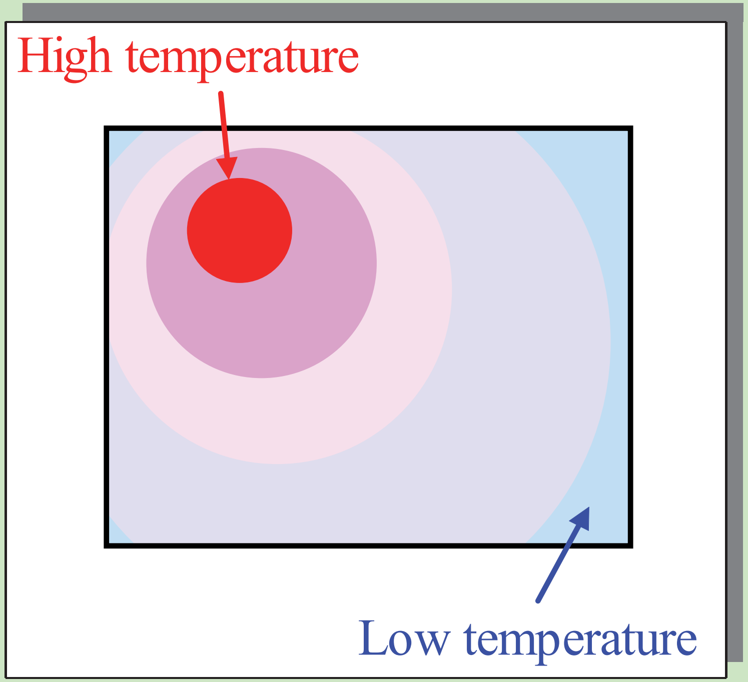
空間の各点 (x_1, x_2, x_3) にベクトル関数 $\boldsymbol{a}(x_1, x_2, x_3)$ $(=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}))$ が与えられている場.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(x_1, x_2, x_3) &= a_1(x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + a_2(x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{e}_2 \\ &\quad + a_3(x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$



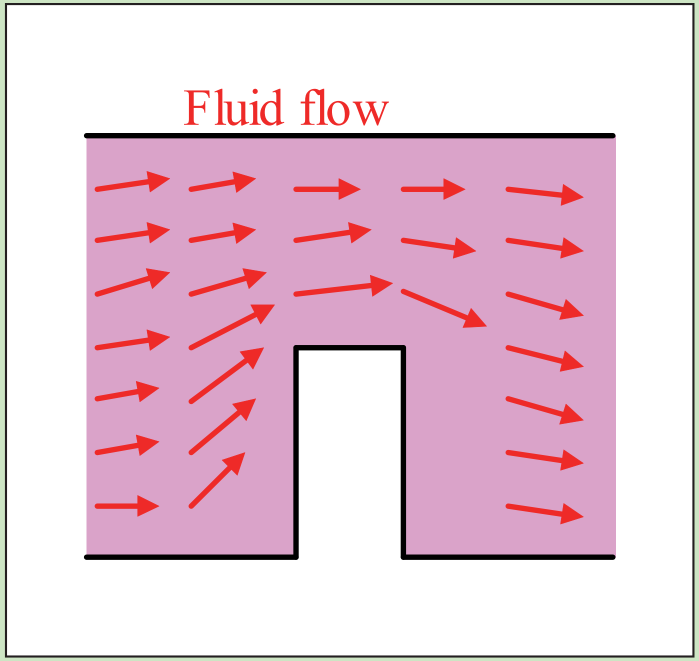
スカラー場とベクトル場

スカラー場



例：物質の温度や密度の分布

ベクトル場



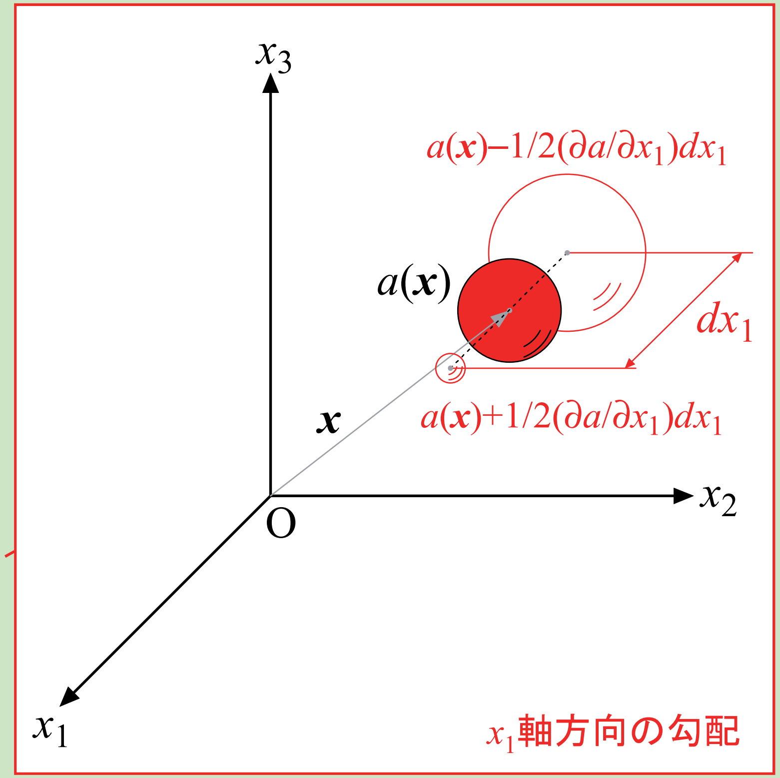
例：流体の速度や静電場

スカラー場の勾配（その１）

例えば，aを物体内の温度と考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}\, a &= \nabla a \\
&= \left(\boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) a \\
&= \boxed{\frac{\partial a}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i} \\
&\left(= \frac{\partial a}{\partial x_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} \boldsymbol{e}_3 \right) \\
&= \begin{bmatrix} \nabla_1 a \\ \nabla_2 a \\ \nabla_3 a \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ベクトル

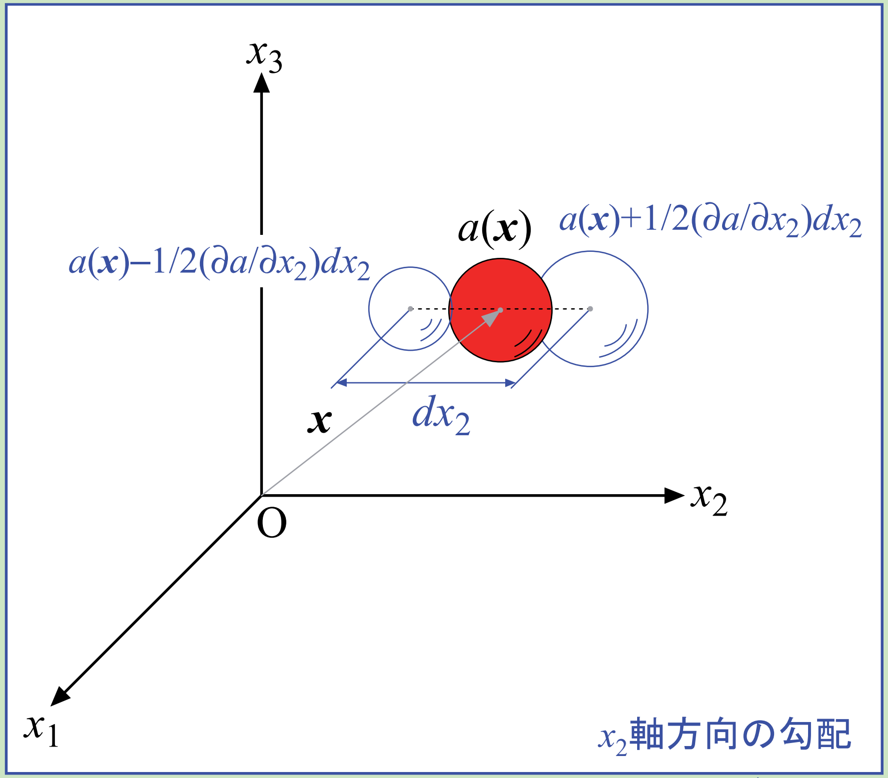


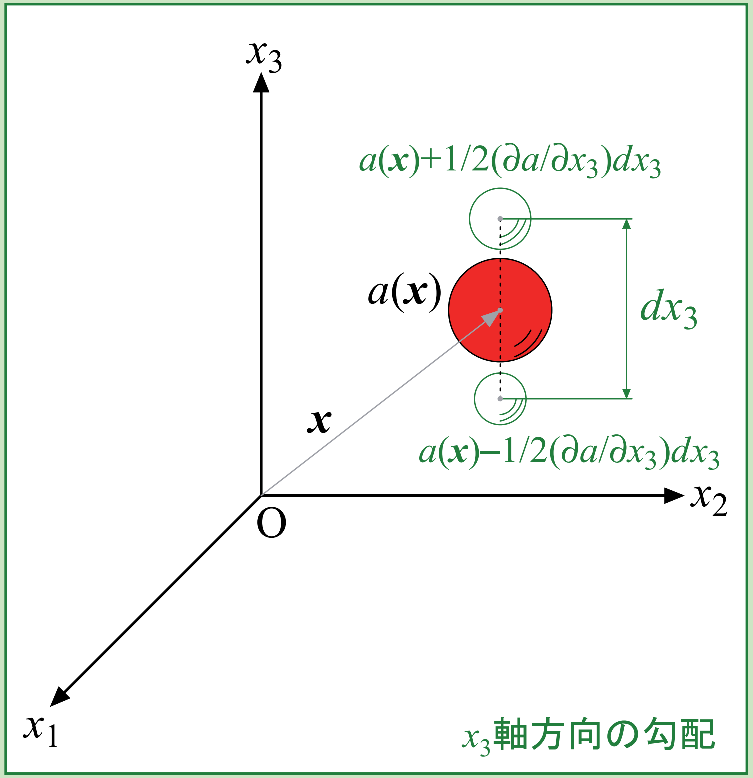
スカラー場
（0階のテンソル）

勾配

ベクトル
（1階のテンソル）

スカラー場の勾配（その２）





$$\mathrm{grad}\, a = \frac{\partial a}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3$$

ベクトル場の勾配（その１）

例えば，$\boldsymbol{a}$を流体の速度ベクトルと考える．

$$
\mathrm{grad}\,\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \boxed{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j}
$$

$$
= \boxed{\boldsymbol{a} \otimes \nabla}
$$

テンソル

$$
= \left[\nabla_j a_i \right]
$$

$$
= \begin{bmatrix} \nabla_1 a_1 & \nabla_2 a_1 & \nabla_3 a_1 \\ \nabla_1 a_2 & \nabla_2 a_2 & \nabla_3 a_2 \\ \nabla_1 a_3 & \nabla_2 a_3 & \nabla_3 a_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

ベクトル場
（1階のテンソル）

勾配

テンソル
（2階のテンソル）

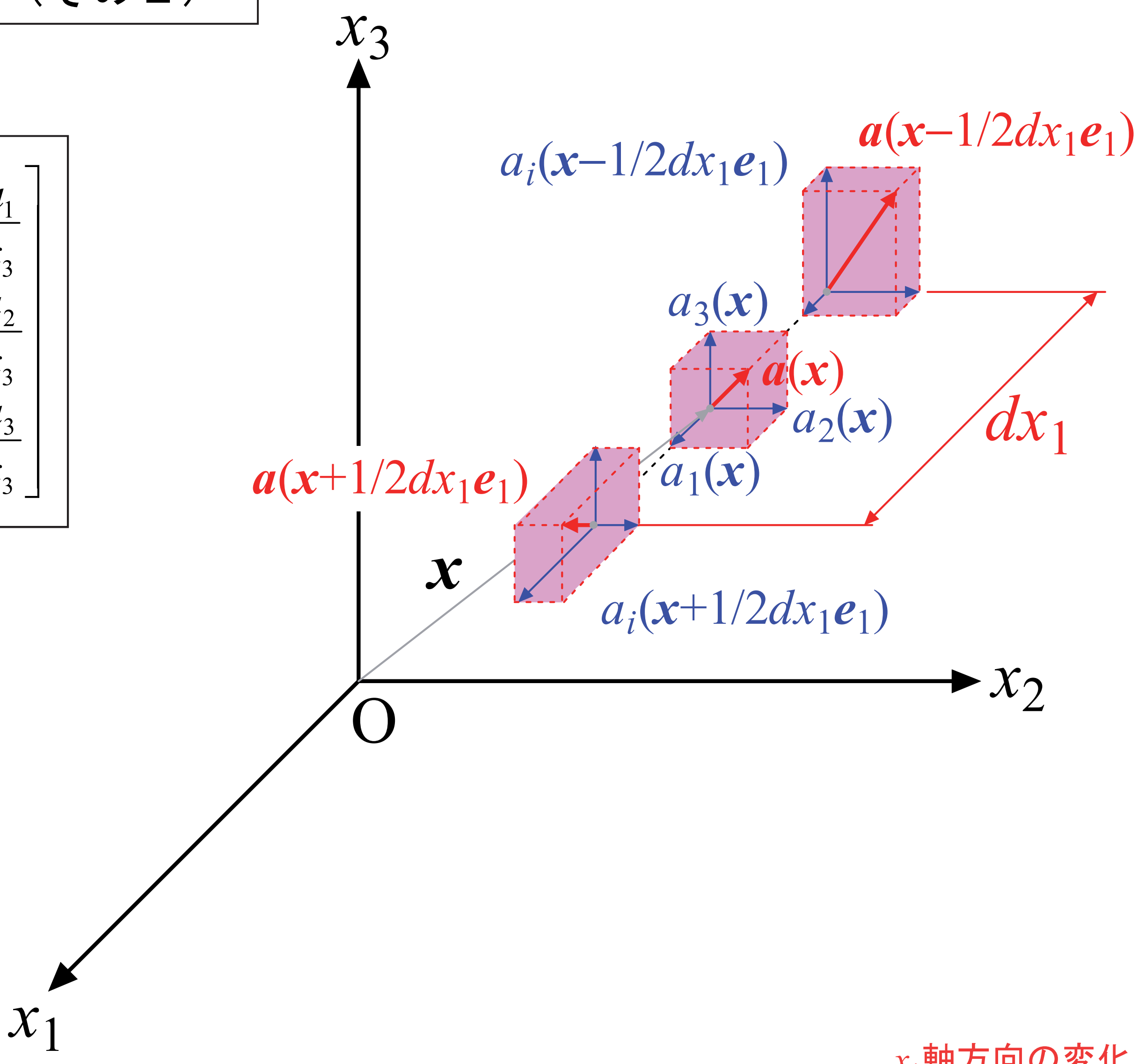
正確には，左記の勾配を右形の勾配と言う．左形の勾配は，

$$
\mathrm{grad}\,\boldsymbol{a} = \nabla \otimes \boldsymbol{a} = \left[\nabla_i a_j \right]
$$

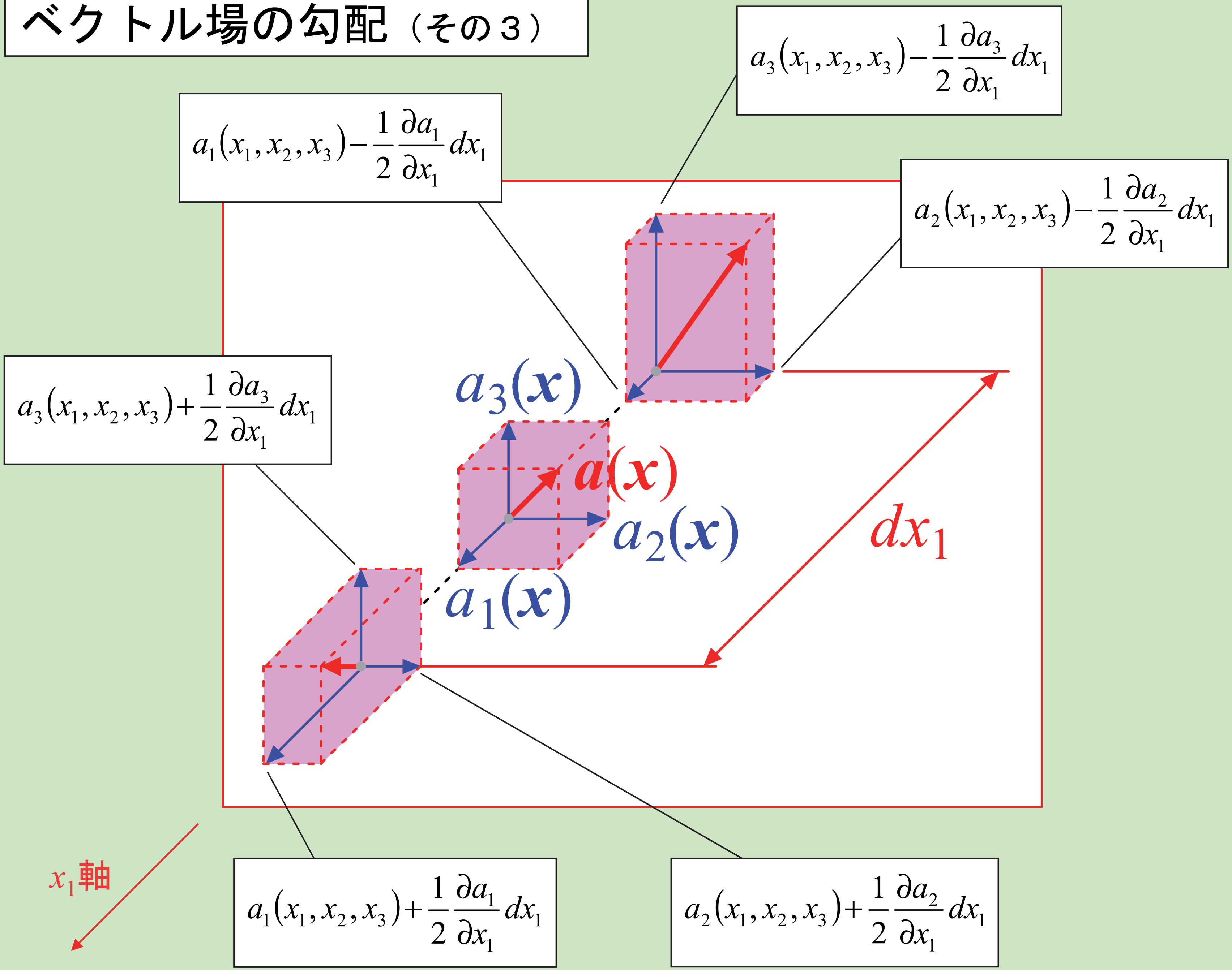
となり，右形とは互いに転置の関係となる．

ベクトル場の勾配（その２）

$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} \end{matrix}} & \begin{matrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} \end{matrix} & \begin{matrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

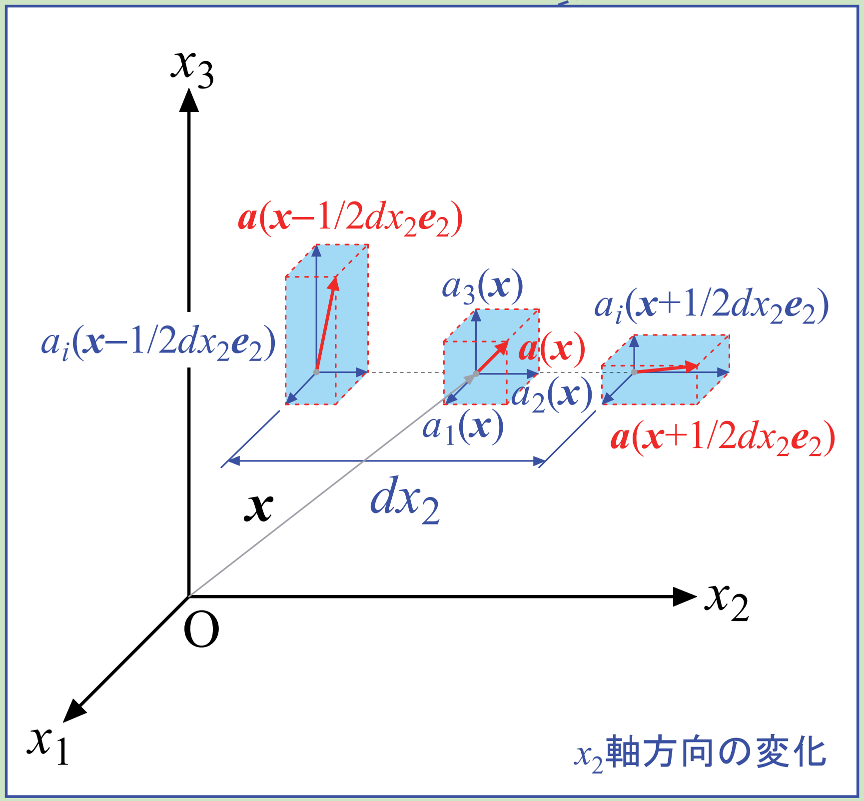


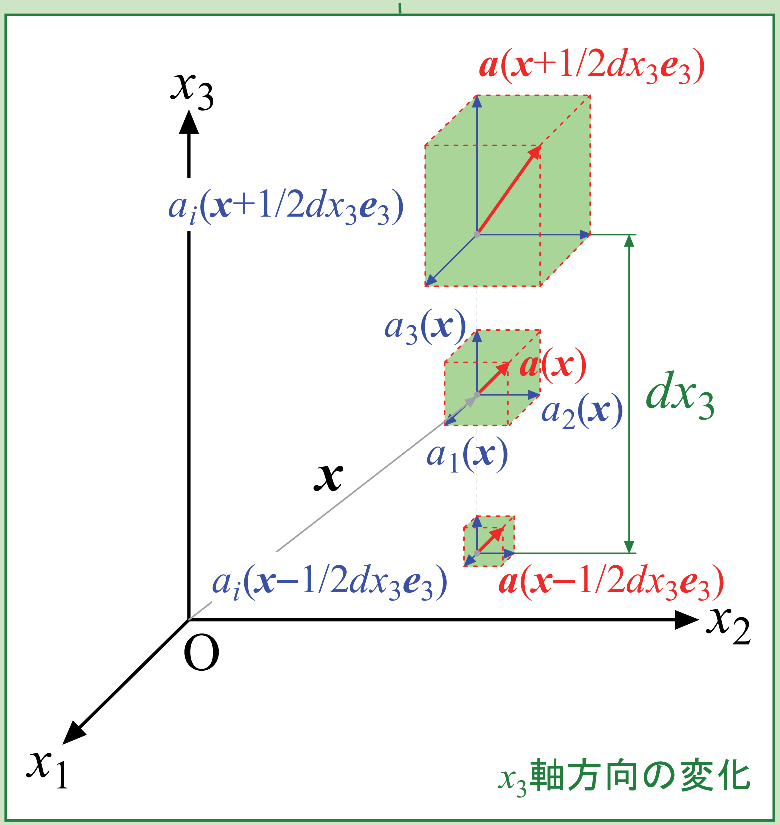
ベクトル場の勾配（その３）



ベクトル場の勾配（その４）

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \boxed{\frac{\partial a_1}{\partial x_2}} & \boxed{\frac{\partial a_1}{\partial x_3}} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$





ベクトル場の発散

発散は，単位体積領域からのわき出し量を意味する．

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{a} &= \nabla\cdot\boldsymbol{a} \\
&= \left(\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left(a_j\boldsymbol{e}_j\right) \\
&= \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \\
&= \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\delta_{ij} \\
&= \boxed{\frac{\partial a_i}{\partial x_i}}\left(=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) \\
&= \nabla_i a_i
\end{aligned}
$$

スカラー

$$
\operatorname{grad}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\
\frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\
\frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3}
\end{bmatrix}
$$

対角成分

$$
\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \operatorname{tr}\left(\operatorname{grad}\boldsymbol{a}\right)
$$

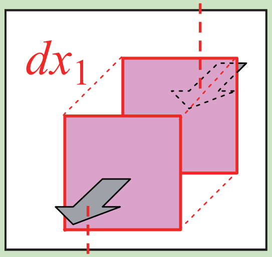
発散は，左形 $(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$ と右形 $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)$ が等しい．

ベクトル場の発散に関する説明

後面からの流入量

$$a_1\left(x_1-\frac{1}{2}dx_1, x_2, x_3\right)dx_2 dx_3$$

−



前面からの流出量

$$a_1\left(x_1+\frac{1}{2}dx_1, x_2, x_3\right)dx_2 dx_3$$

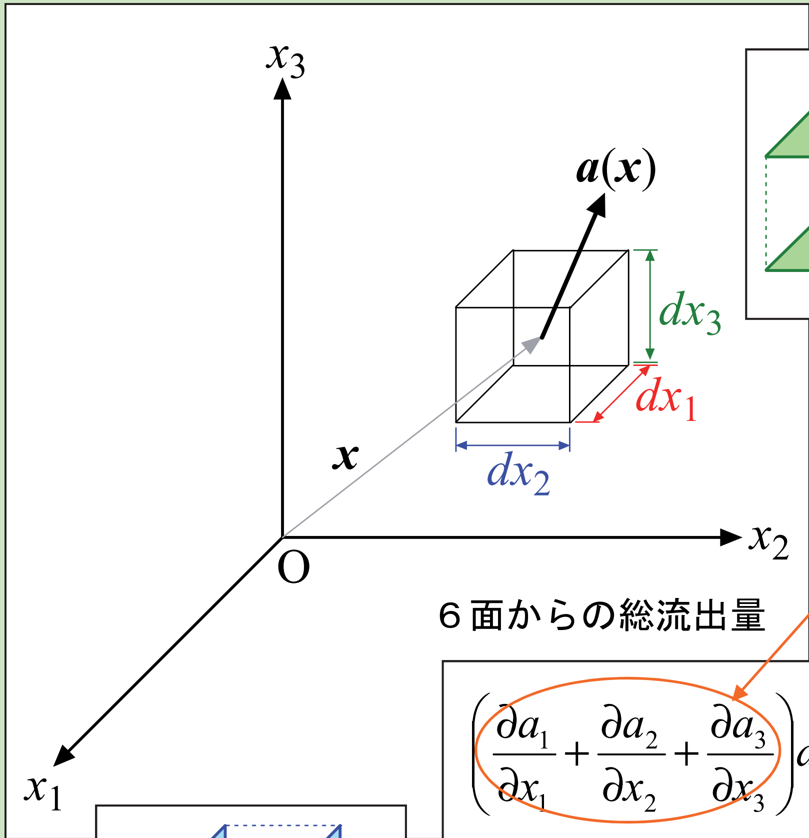
+

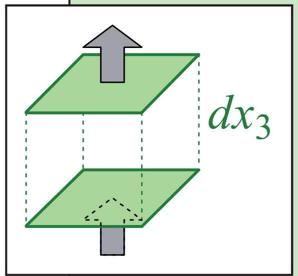
x_1軸に垂直な面からの総流出量

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)dx_1 dx_2 dx_3$$

x_3軸に垂直な面からの総流出量

$$\frac{\partial a_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)dx_1 dx_2 dx_3$$

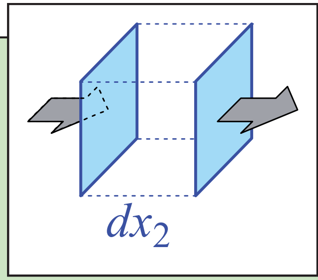




div $\boldsymbol{a}$

６面からの総流出量

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right)dx_1 dx_2 dx_3$$



x_2軸に垂直な面からの総流出量

$$\frac{\partial a_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)dx_1 dx_2 dx_3$$

ベクトル場の回転

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a}$$
$$= \left(\boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \times \left(a_j \boldsymbol{e}_j\right)$$
$$= \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j$$
$$= \frac{\partial a_j}{\partial x_i} e_{ijk} \boxed{\boldsymbol{e}_k}$$

ベクトル

回転の各成分は，その軸まわりの回転の強さを表す．

流体力学

単位面積当たりの循環の極限値．

循環 $\Gamma = \oint_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}}{\Delta S}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a}$$
$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

形式的な行列式表現

回転は，左形と右形が互いに逆符号となる．

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \nabla$$

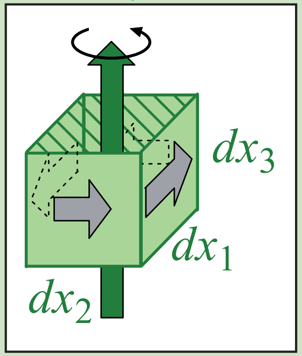
ベクトル場の回転に関する説明（その１）

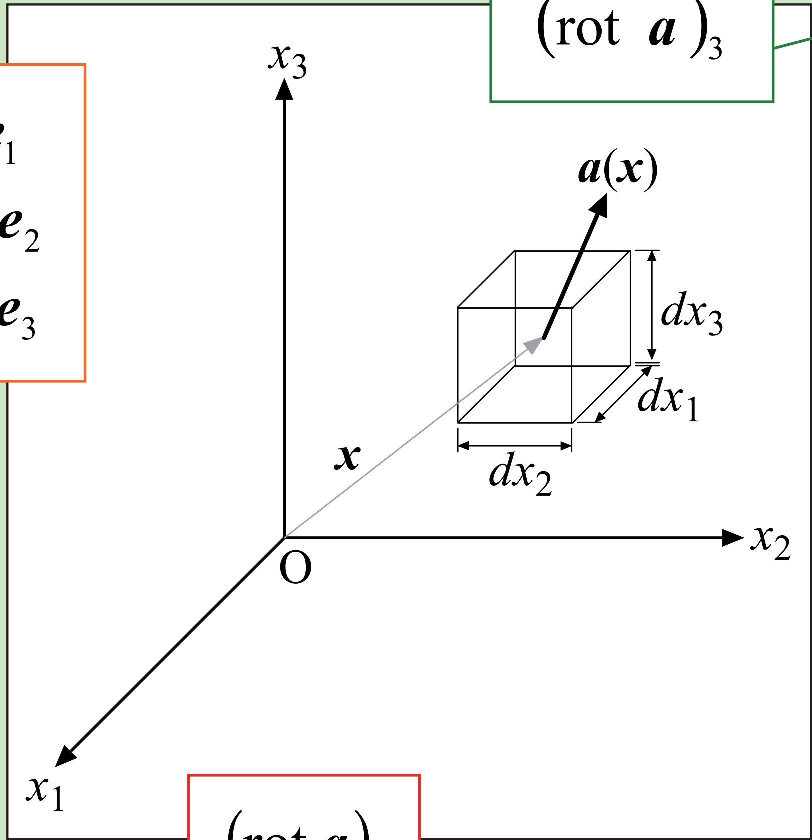
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_1 \boldsymbol{e}_1 + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_2 \boldsymbol{e}_2 + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_3 \boldsymbol{e}_3$$

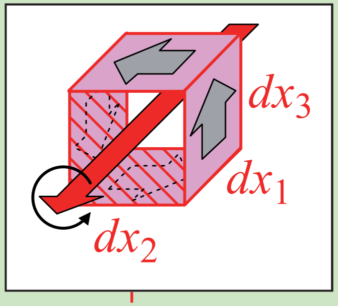
$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})_3$

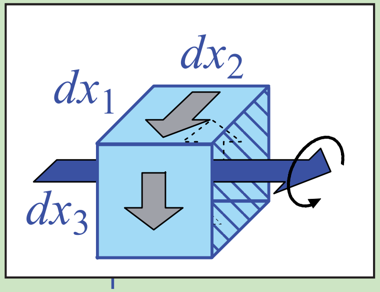
x_3軸まわりの回転

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 dx_3$$









$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_1$

x_1軸まわりの回転

$$\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3$$

$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_2$

x_2軸まわりの回転

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 dx_3$$

ベクトル場の回転に関する説明（その２）

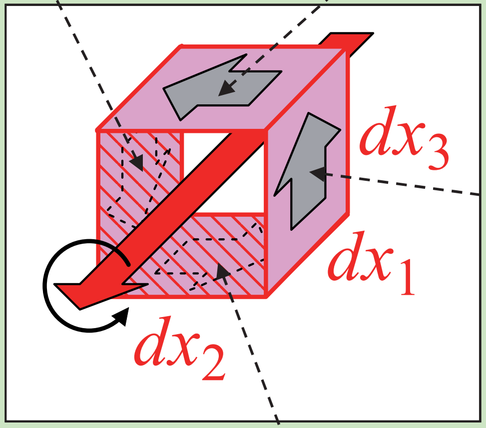
左面における回転方向の成分

$$-a_3\left(x_1, x_2-\frac{1}{2}dx_2, x_3\right)dx_1dx_3$$

$$-a_3\left(x_1, x_2-\frac{1}{2}dx_2, x_3\right)dx_1dx_3$$
$$=-a_3(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_3$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial a_3}{\partial x_2}dx_1dx_2dx_3$$

上面における回転方向の成分

$$-a_2\left(x_1, x_2, x_3+\frac{1}{2}dx_3\right)dx_1dx_2$$



右面における回転方向の成分

$$a_3\left(x_1, x_2+\frac{1}{2}dx_2, x_3\right)dx_1dx_3$$

$$a_3\left(x_1, x_2+\frac{1}{2}dx_2, x_3\right)dx_1dx_3$$
$$=a_3(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_3$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial a_3}{\partial x_2}dx_1dx_2dx_3$$

x_1軸

x_1軸まわりの回転方向成分の合計

$$\boxed{\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3}$$

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})_1$$

下面における回転方向の成分

$$a_2\left(x_1, x_2, x_3-\frac{1}{2}dx_3\right)dx_1dx_2$$