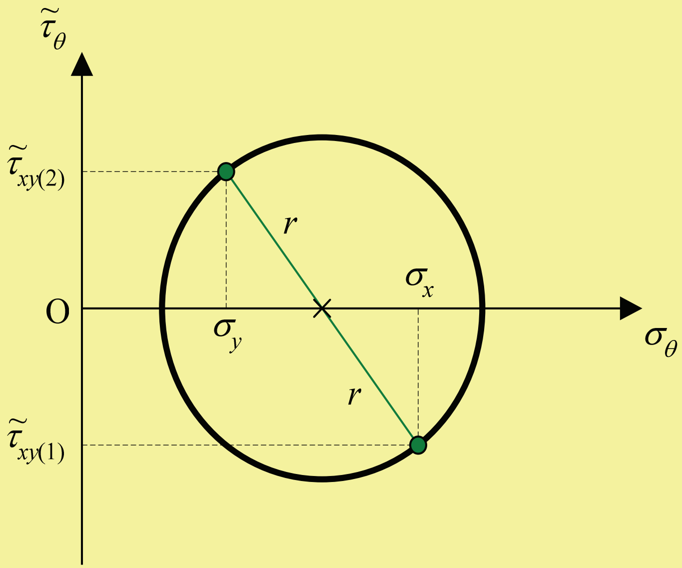
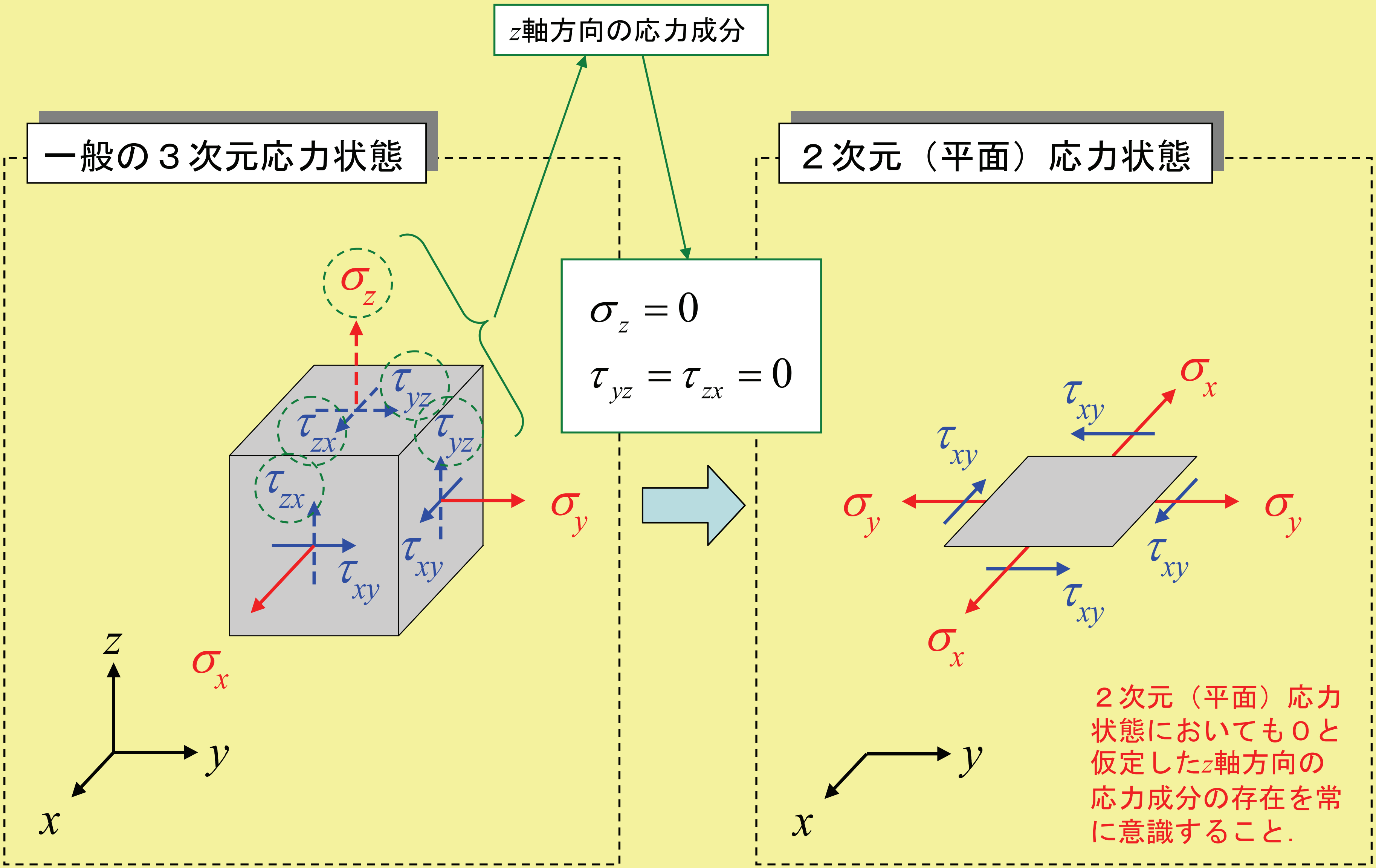
モールの応力円



$\tilde{\tau}_\theta$
$\tilde{\tau}_{xy(2)}$
r
σ_x
O
σ_y
σ_θ
r
$\tilde{\tau}_{xy(1)}$

二次元応力状態



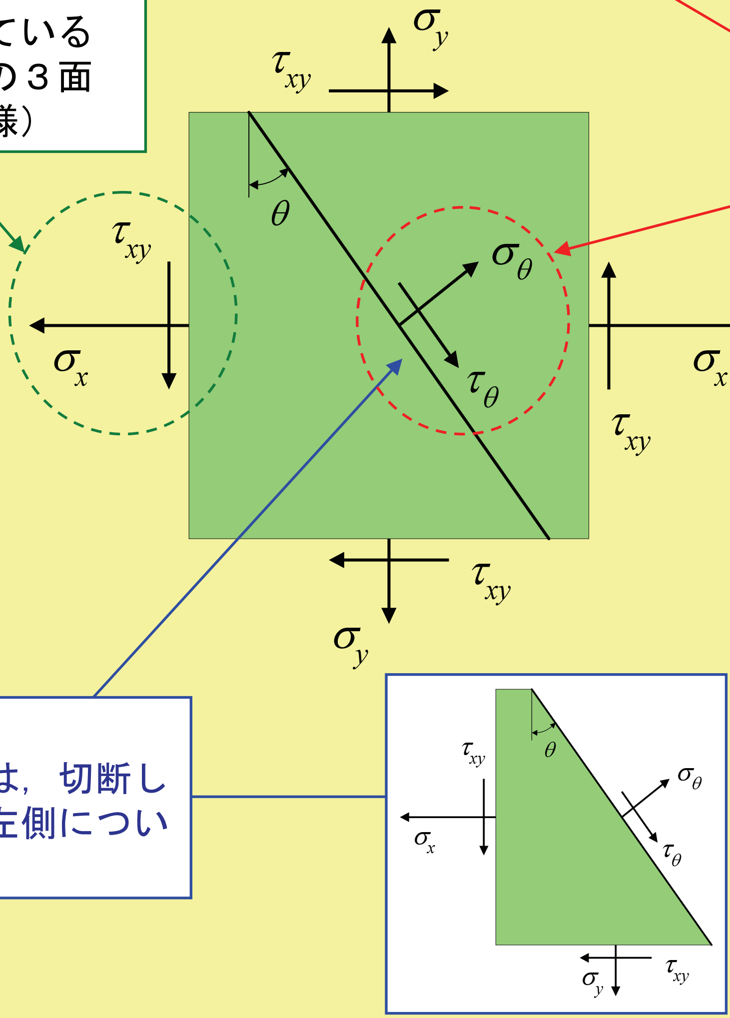
z軸方向の応力成分
一般の３次元応力状態
σ_z
τ_{yz}
τ_{zx}
τ_{yz}
τ_{zx}
σ_y
τ_{xy}
τ_{xy}
σ_x
z
y
x
$\sigma_z = 0$
$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$
２次元（平面）応力状態
σ_x
τ_{xy}
τ_{xy}
σ_y
σ_y
τ_{xy}
τ_{xy}
σ_x
y
x
２次元（平面）応力
状態においても０と
仮定したz軸方向の
応力成分の存在を常
に意識すること.

二次元応力状態における任意の断面上の応力成分

ある点においてある方向（角度θ）の断面に作用する応力は，垂直応力σ_θとせん断応力τ_θの２つの量で表される．

遠方で作用している応力（その他の３面についても同様）

点の位置と面の方向の両方が決まった場合は，２種類の応力成分のみで良い．



対象断面（ここでは，切断した物体の左側について考える）

ある点における応力状態を完全に記述するためには，すなわち，その点におけるあらゆる方向の断面の応力状態をすべて記述するには，３つの応力成分（応力テンソルσ）が必要となる．

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

応力成分の式からモールの応力円へ

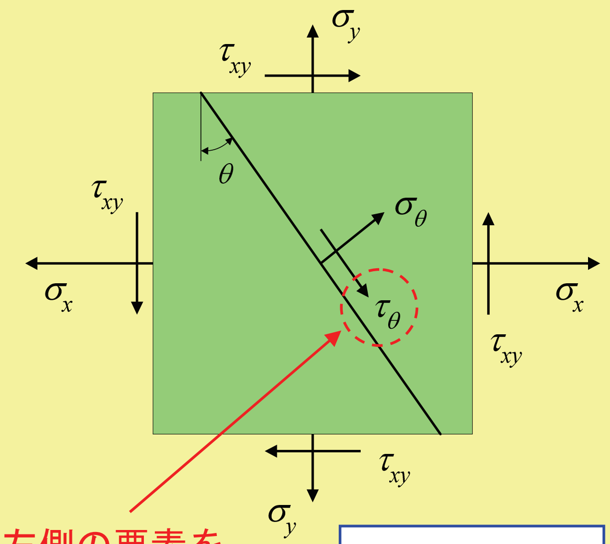
任意の断面（角度θ）上に作用する応力

垂直応力

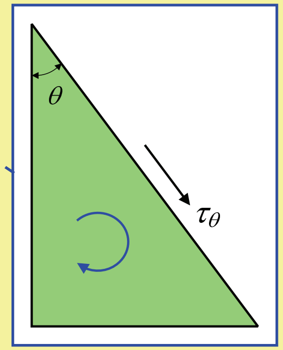
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

せん断応力

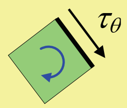
$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta$$



τ_θの向きに注意（左側の要素を時計回りに回す向き，常に一定の方向を正に取っている）



時計回り



モールの応力円

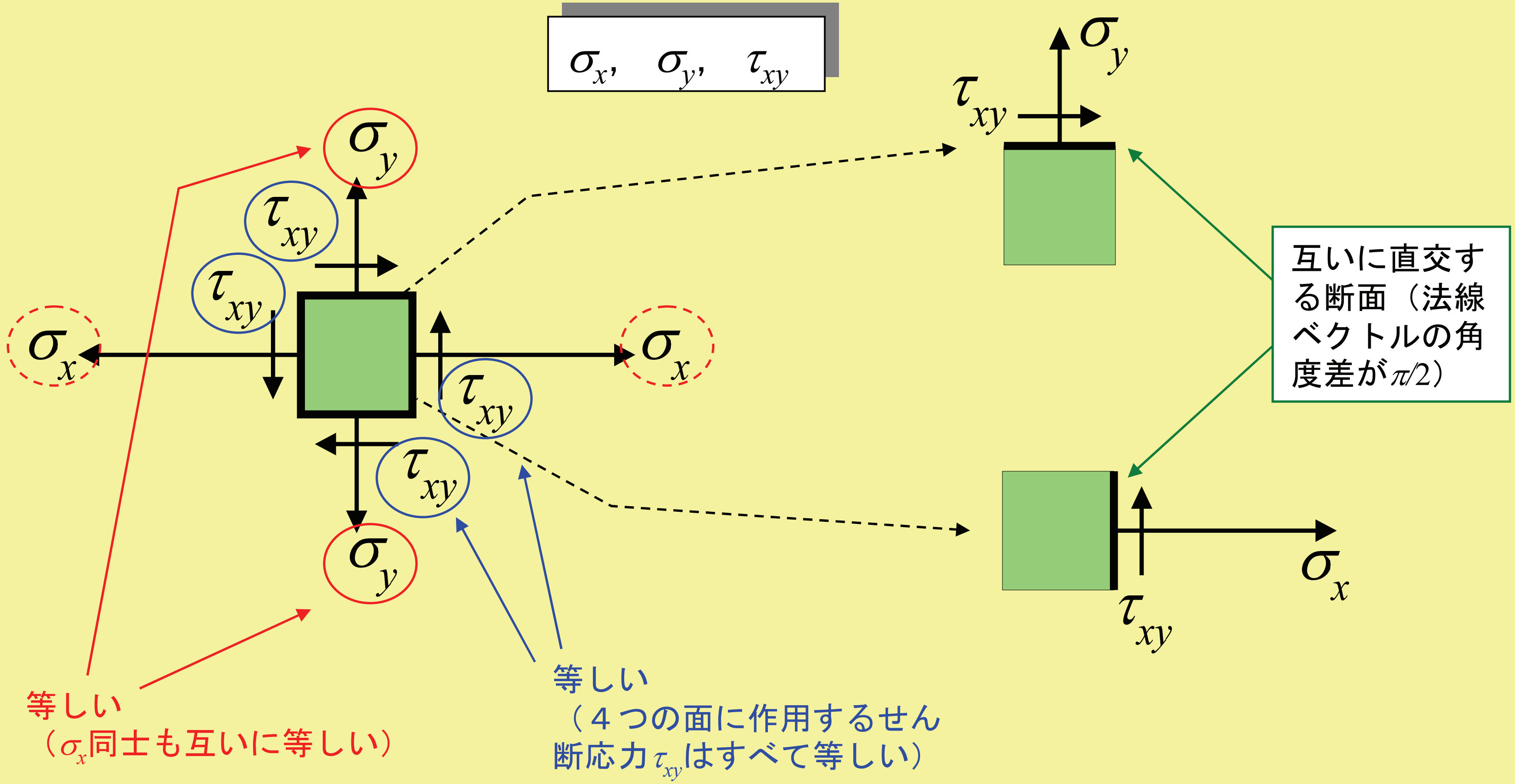
$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta{}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2$$

中心 $\left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$

半径 $\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$

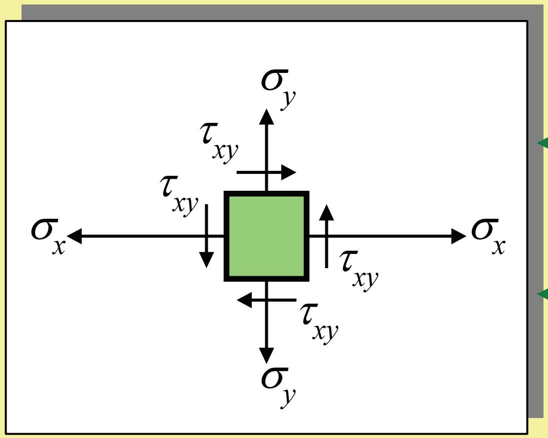
二次元応力状態の図形的表示

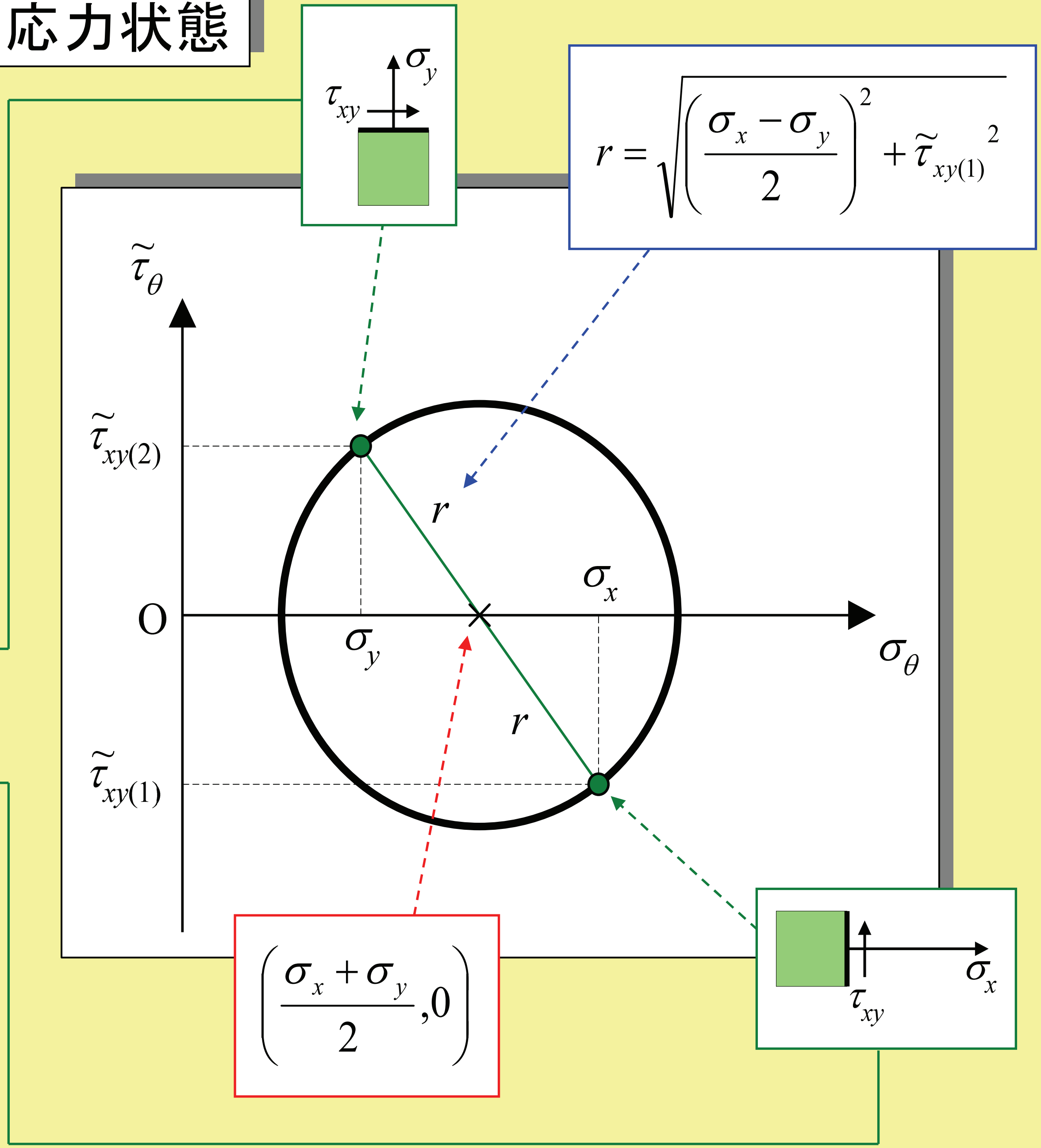
一般に，ある点における応力状態を完全に記述するには，互いに直交する断面上の垂直応力とせん断応力を用いる．その際に必要となる応力成分は，σ_xとσ_yとτ_{xy}の３つである．



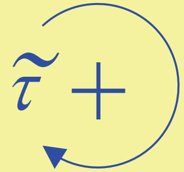
モールの応力円で表す応力状態

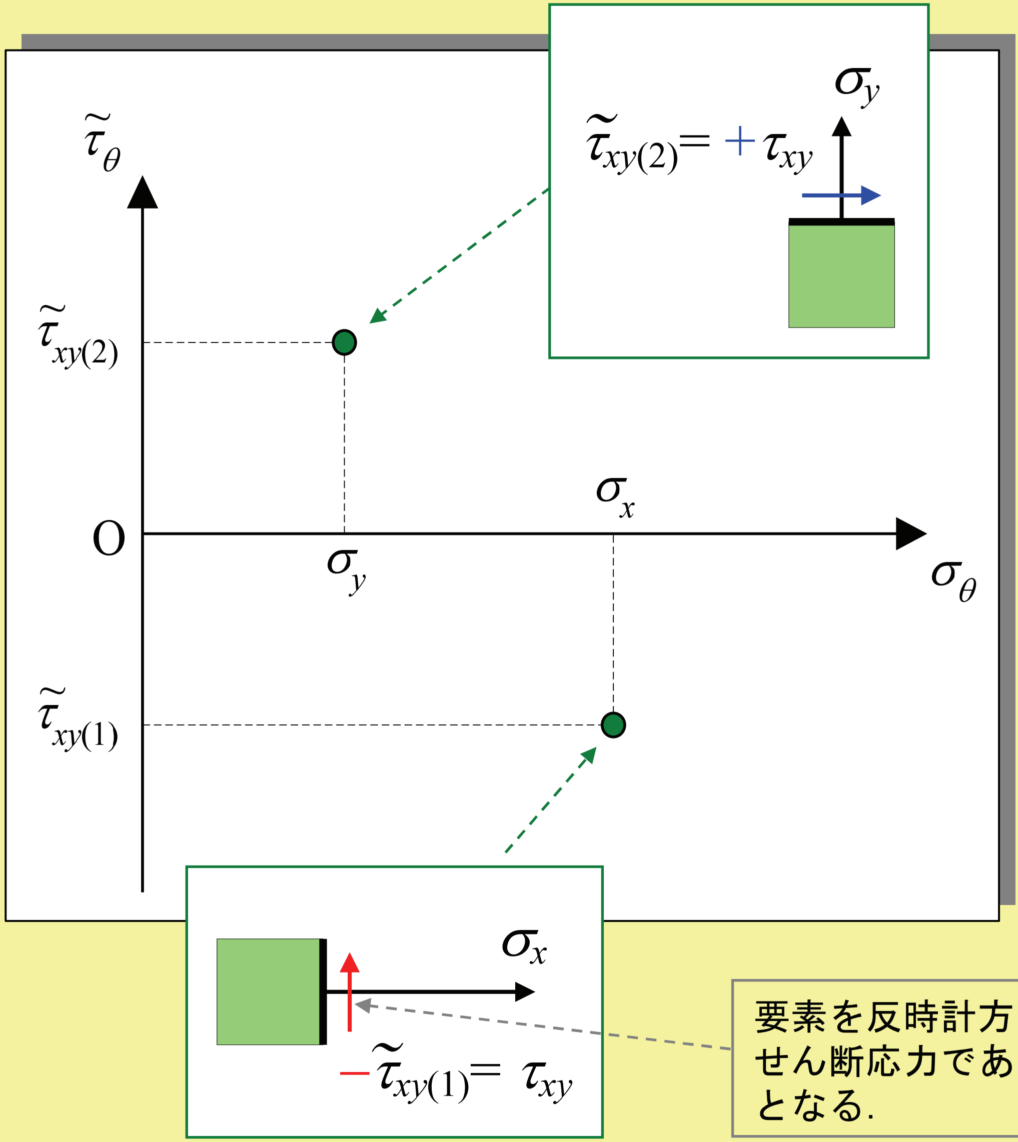
　ある点における応力状態をモールの応力円上で表すには，円の中心に対して互いに向かい合う２点（直交する２断面上の応力）を用いる．





モールの応力円の描き方（１）





要素を反時計方向に回すせん断応力であるから負となる.

手順１

互いに垂直な２断面に作用するせん断応力に対してモールの応力円の規約（要素を時計回りに回すせん断応力を正とする）を適用する.

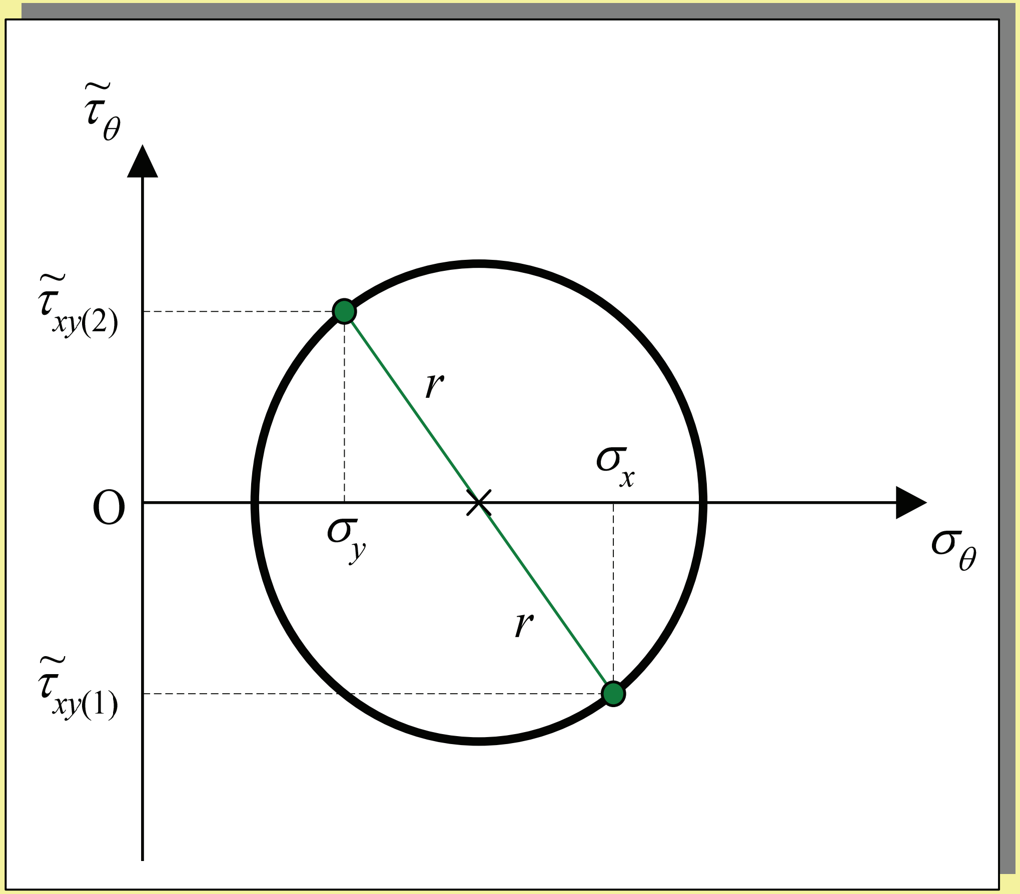
$$\tau_{xy} \xrightarrow{\text{Mohr's circle}} \tilde{\tau}_{xy}$$

モールの応力円の規約を適用した後のせん断応力

手順２

横軸がσ_θ，縦軸が$\tilde{\tau}_\theta$のグラフ上に２断面の応力をプロットする.

モールの応力円の描き方（２）



手順３

$((\sigma_x+\sigma_y)/2, 0)$を中心とし，先にプロットした両点を通る円を描く．

手順４

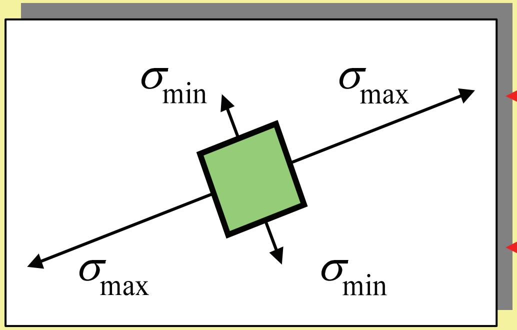
必要であれば，主応力や最大せん断応力を求める．

注意点１：モールの応力円では，せん断応力の正の向きが一般の規約とは異なる．

注意点２：モールの応力円において，円の中心に対して対称な円周上の２点を結ぶ直線（例えば，上図において緑色の線）の角度は，要素断面の実際の角度とは異なる．

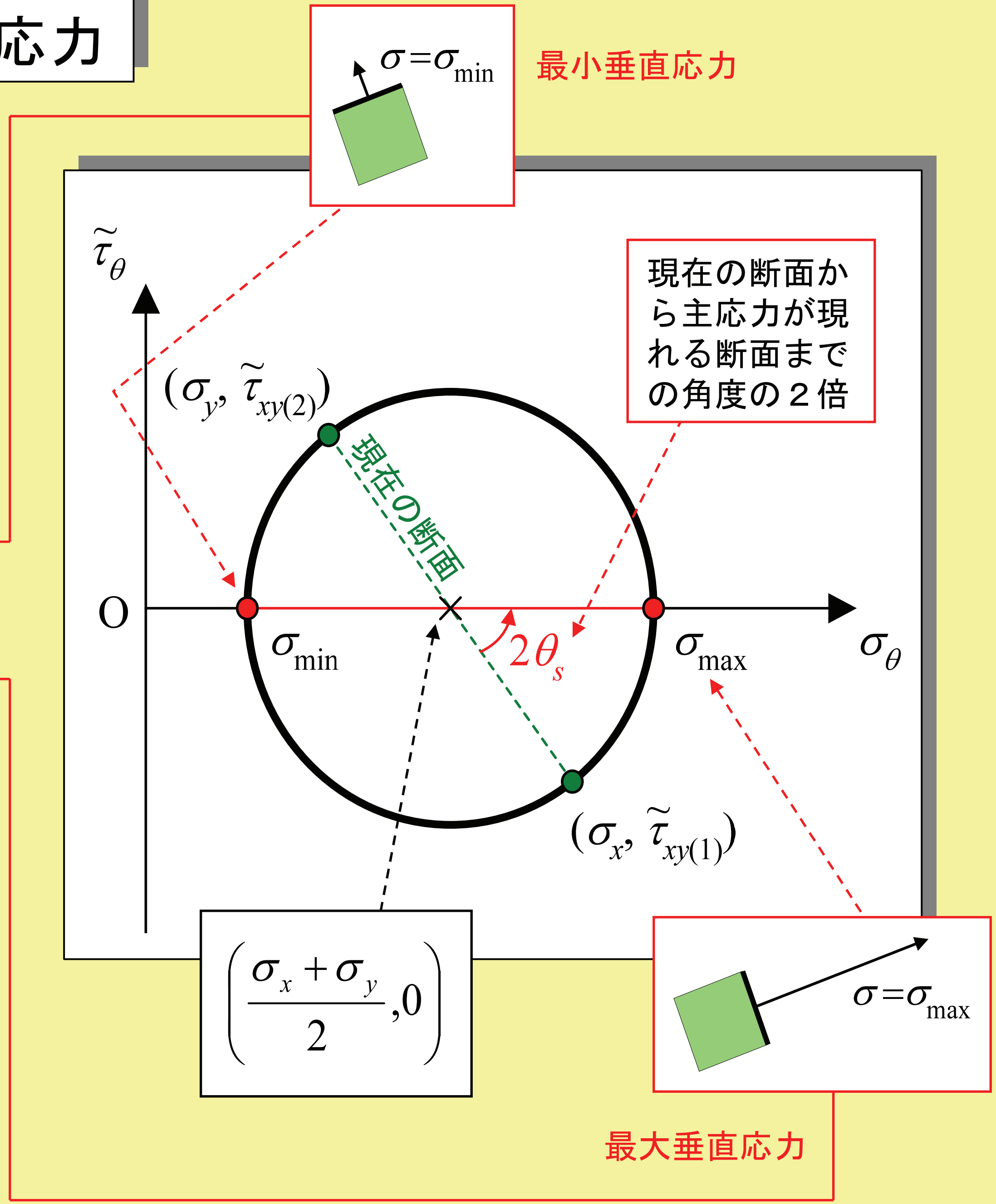
モールの応力円上での主応力

　モールの応力円上で主応力（最大および最小の垂直応力）は，円と横軸との交点（２点）で表される．



せん断応力は零となる．

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tilde{\tau}_{xy(1\,\mathrm{or}\,2)}^{\;2}}$$



主応力と応力テンソルの固有値

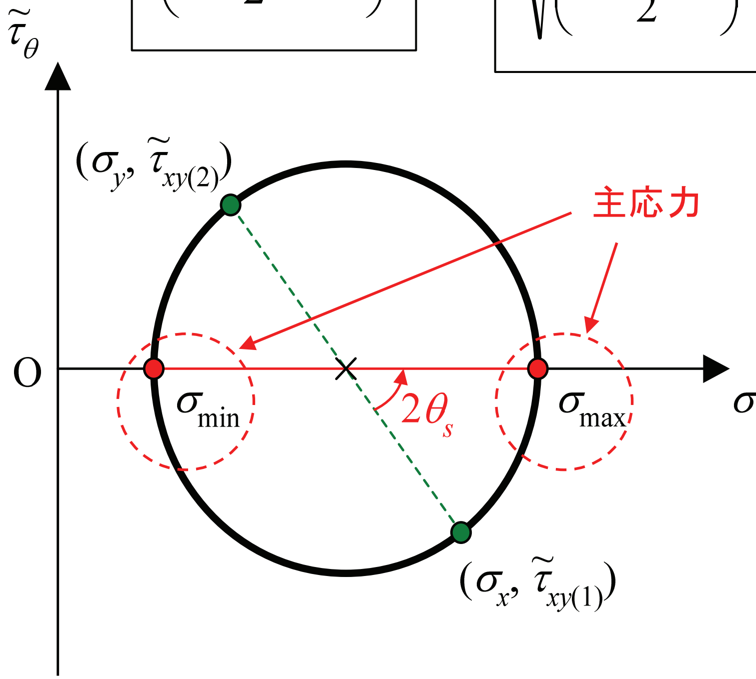
モールの応力円

中心

$$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$$

半径

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$



応力テンソルの固有値

応力テンソルσの特性方程式

$$\det(\boldsymbol{\sigma}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

$$\begin{vmatrix}\sigma_x-\lambda & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(\sigma_x-\lambda)(\sigma_y-\lambda)-\tau_{xy}{}^2=0$$

$$\lambda^2-(\sigma_x+\sigma_y)\lambda+(\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}{}^2)=0$$

固有値

$$\lambda=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$

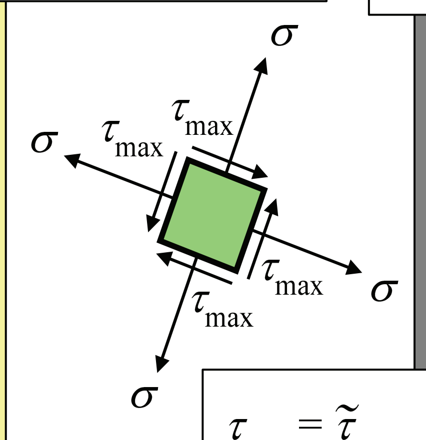
主応力

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$

モールの応力円上での最大せん断応力

モールの応力円上で，せん断応力の最大値および最小値は，それぞれ，円の**上端と下端**の２点で表される．

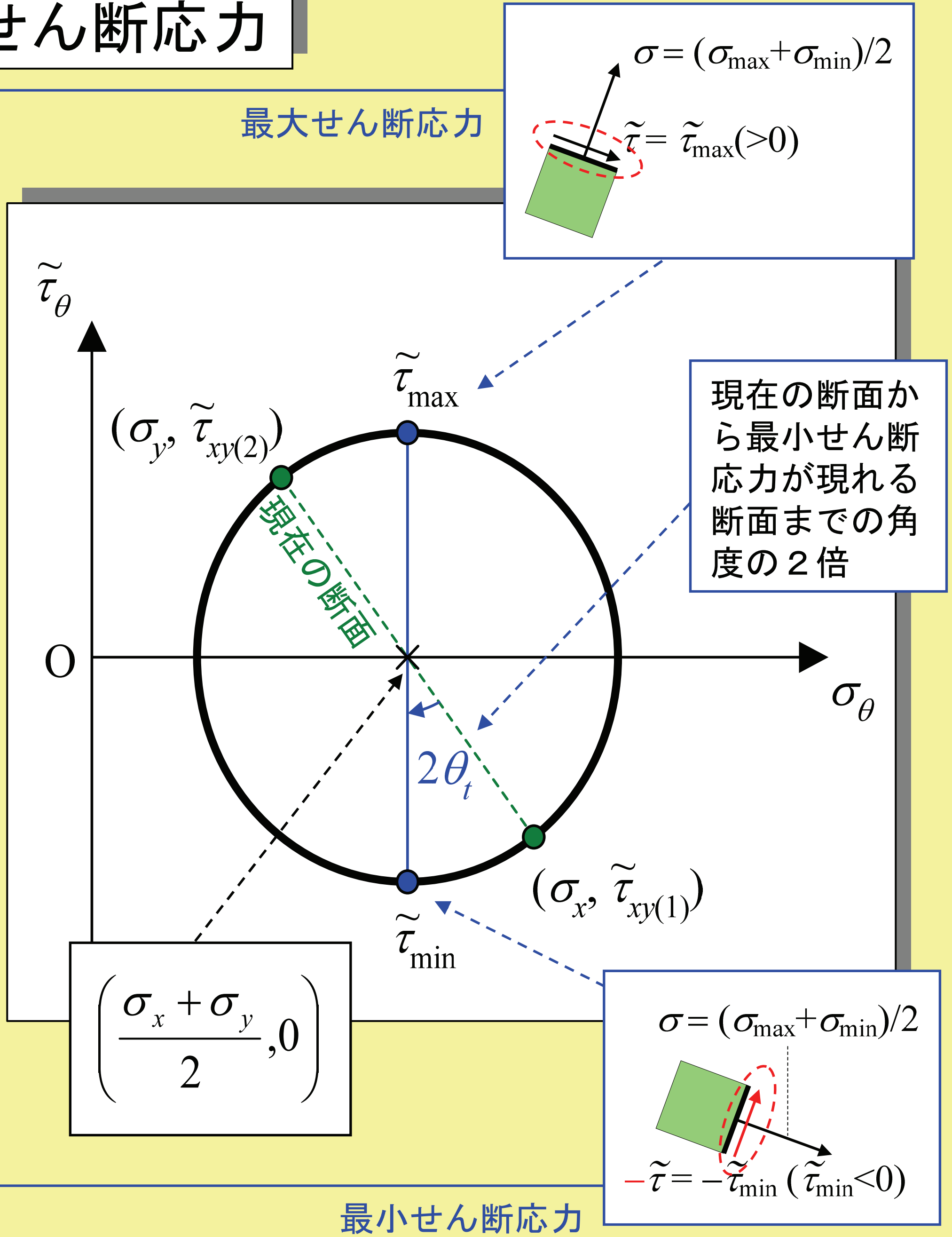
$$\sigma=(\sigma_{max}+\sigma_{min})/2=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$



$$\tau_{max}=\tilde{\tau}_{max}=|\tilde{\tau}_{min}|=(\sigma_{max}-\sigma_{min})/2=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tilde{\tau}_{xy(1\,\mathrm{or}\,2)}{}^2}$$

垂直応力は零とはならない．

最大せん断応力と最小せん断応力の絶対値は等しい．

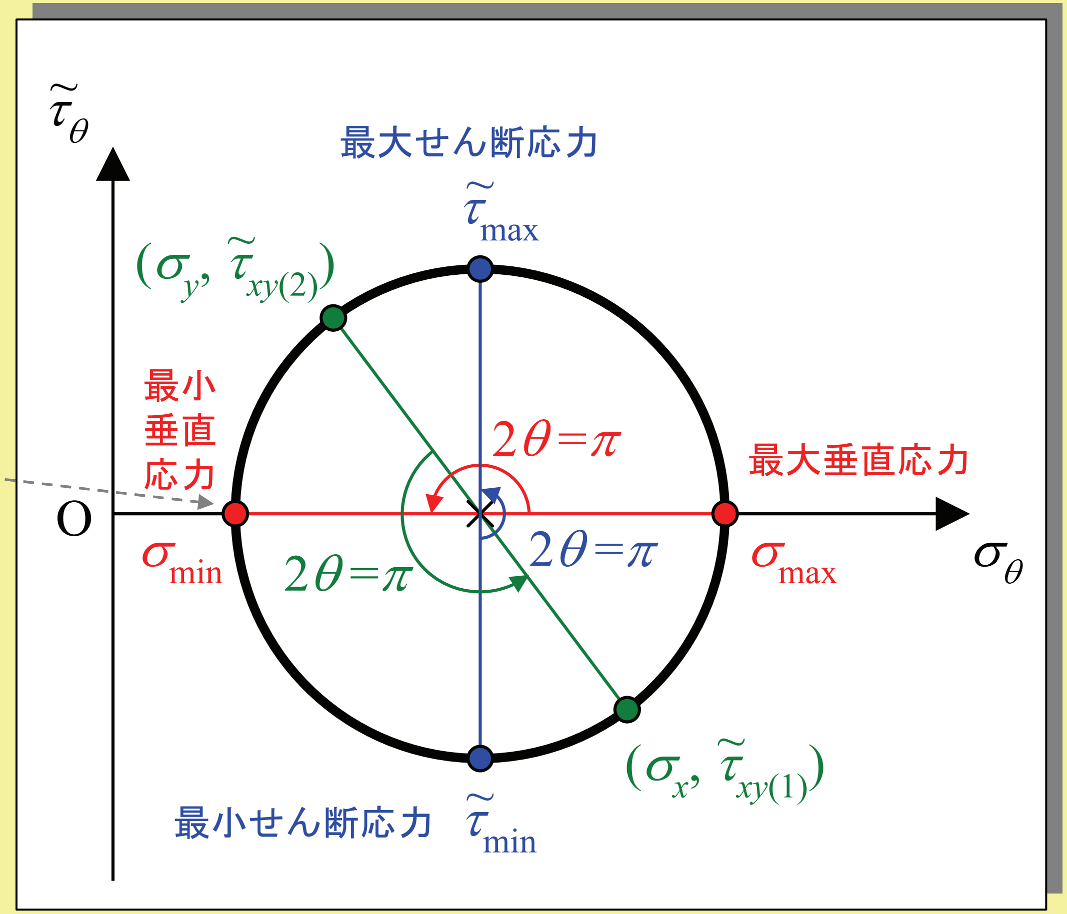


モールの応力円からわかる応力成分の特徴（その１）

・互いに直交する２つの断面上の垂直応力の和は一定である.

・互いに直交する２つの断面上のせん断応力の向きは逆で大きさは等しい.

応力を厳密に３次元的に考える場合は，平面応力状態で０と仮定した平面要素に垂直な方向の応力成分も考慮する必要がある．実際，右図の場合は，それが最小垂直応力（最小主応力）となる．



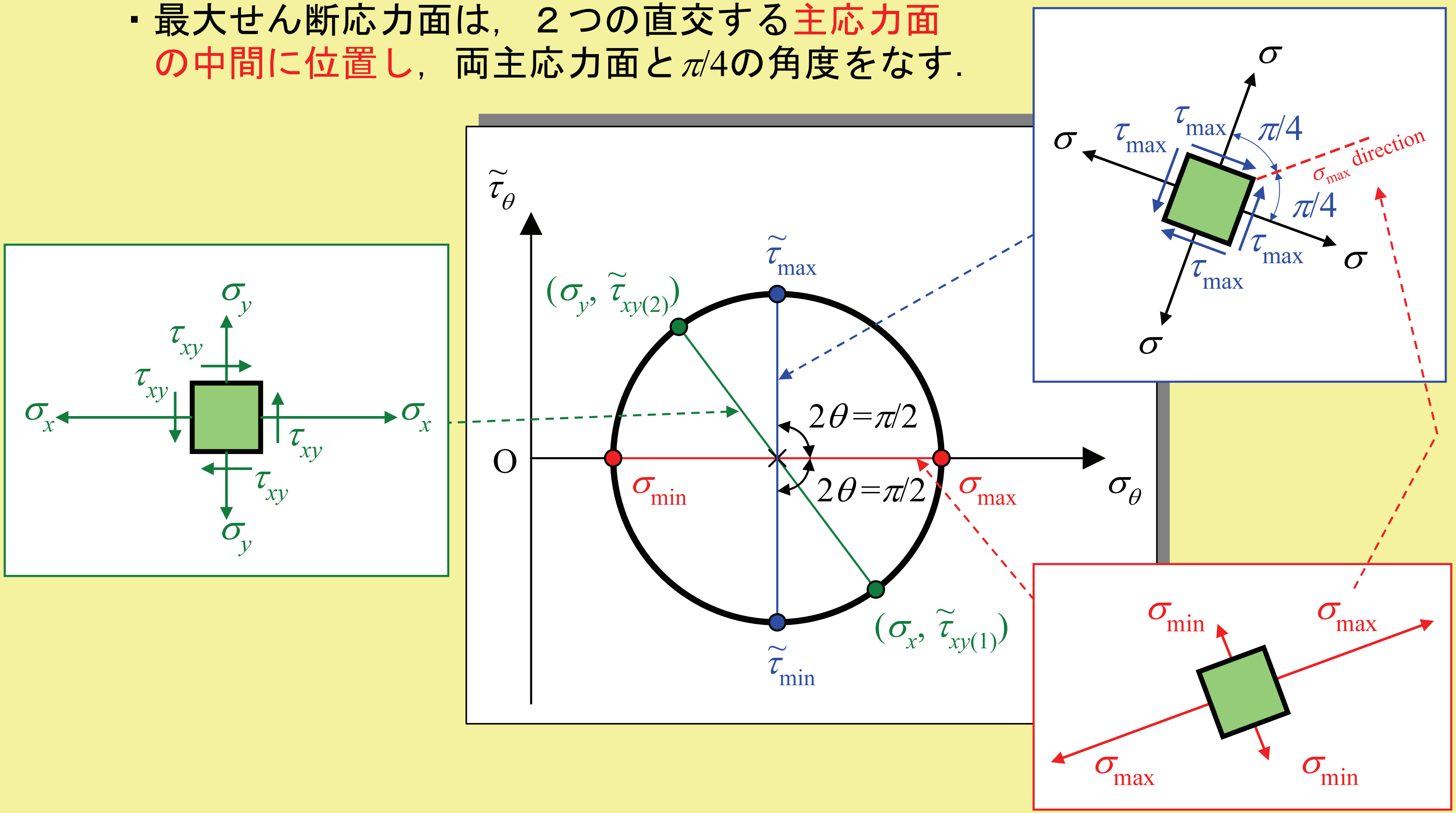
直交する２断面（$2\theta=\pi$）の応力を表す円周上の２点の中点は，常に同じ位置（応力円の中心）にある．

直交する２断面（$2\theta=\pi$）の応力を表す円周上の２点は，常に横軸に対して上下対称な位置にある．

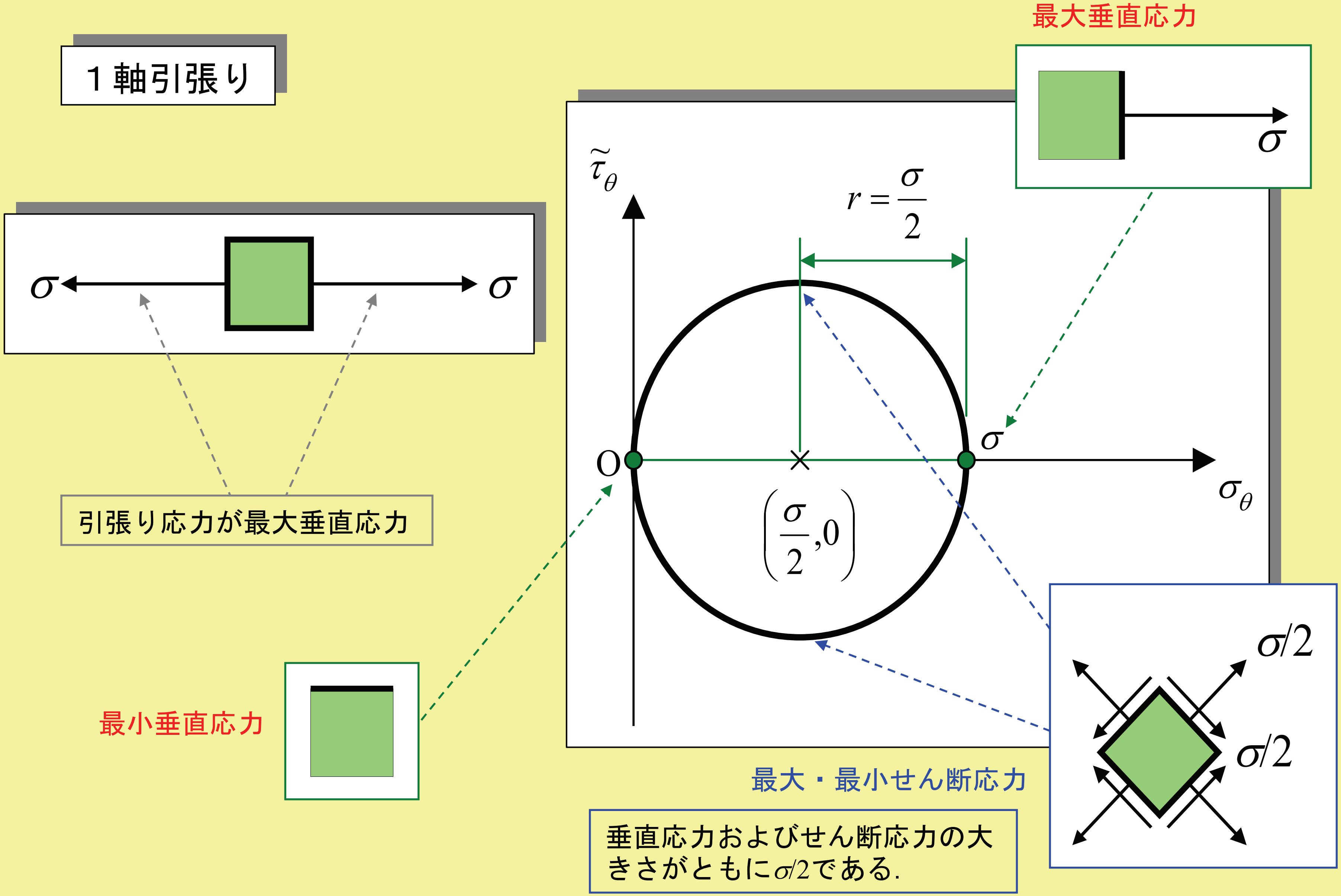
モールの応力円からわかる応力成分の特徴（その２）

・２つの主応力面は，互いに直交する．

・最大せん断応力面は，２つの直交する主応力面の中間に位置し，両主応力面と$\pi/4$の角度をなす．

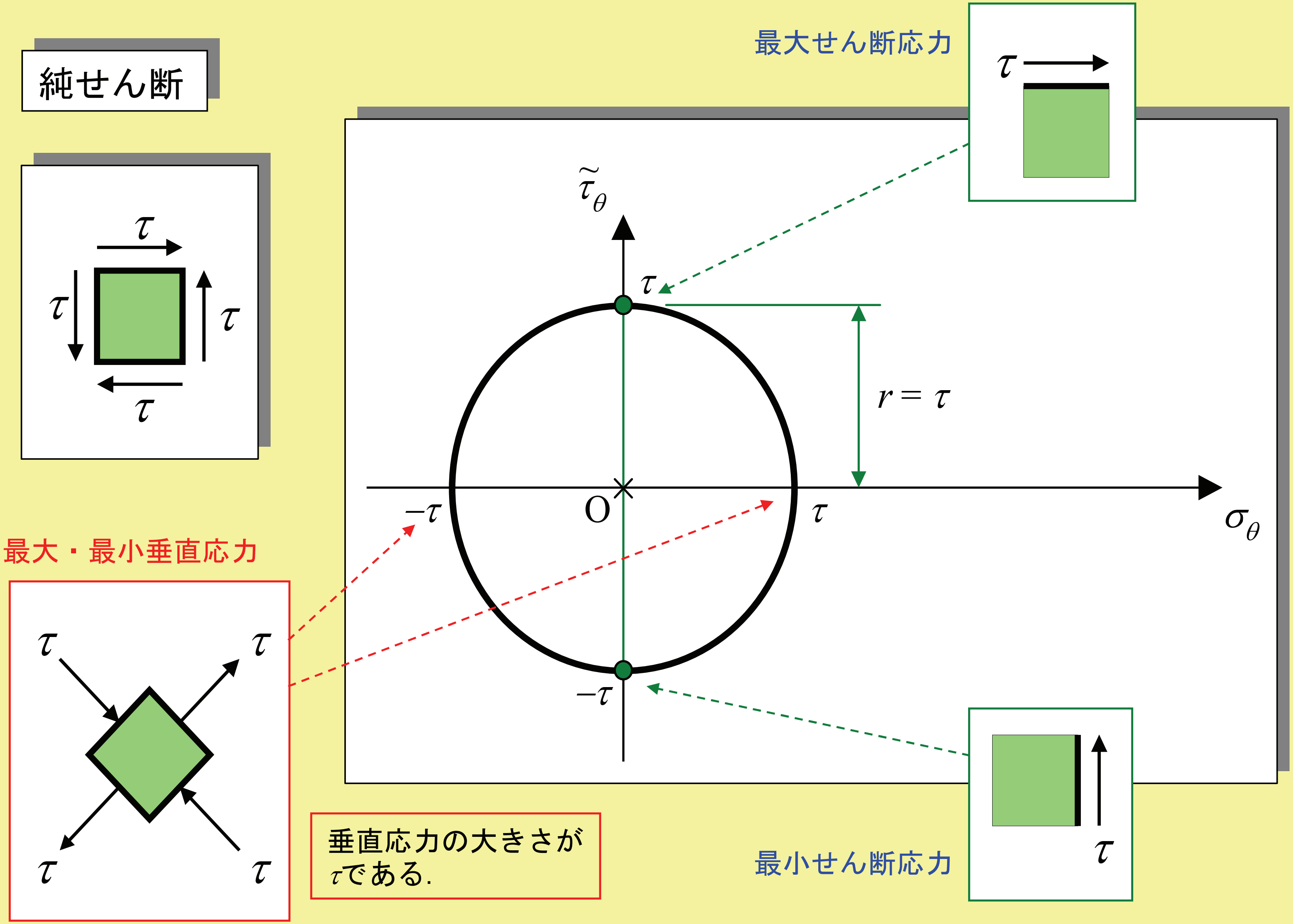


モールの応力円で表す種々の応力状態（１軸引張り）



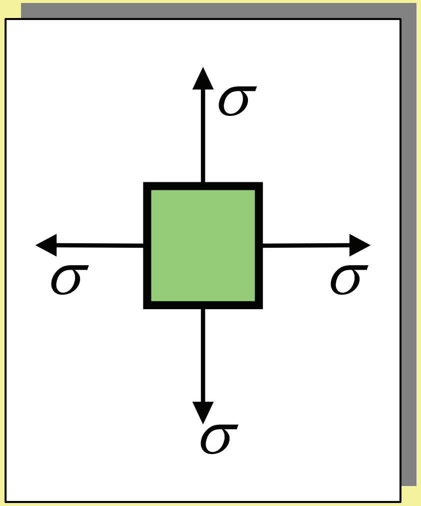
モールの応力円で表す種々の応力状態（純せん断）

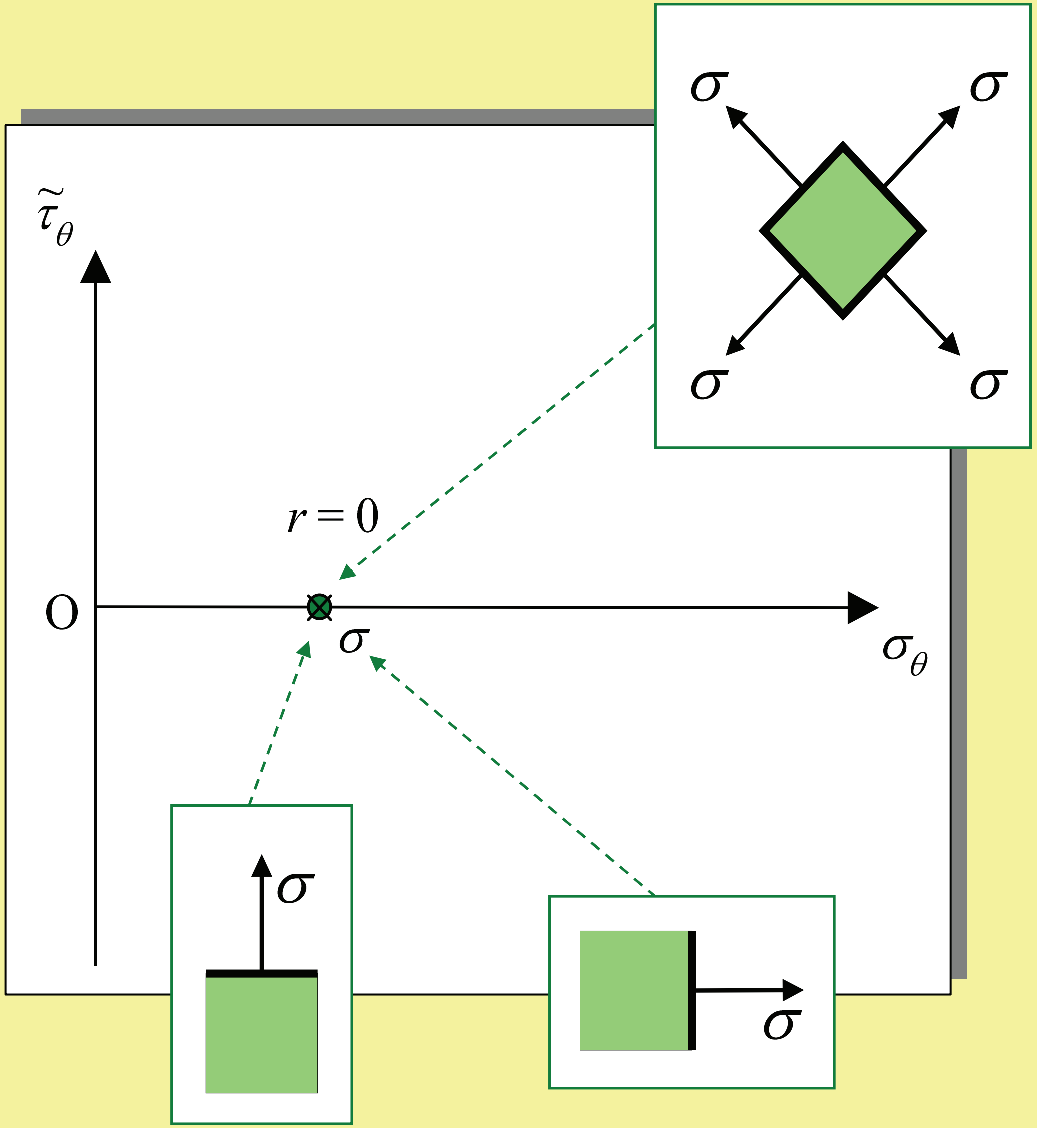
純せん断



モールの応力円で表す種々の応力状態（等２軸引張り）

等２軸引張り





どの方向の断面においても
応力状態が等しい.

どの方向の断面においても
せん断応力が存在しない.