弾性体の構成式

Hooke’s law

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Lame’s constant

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

linear elastic solid

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

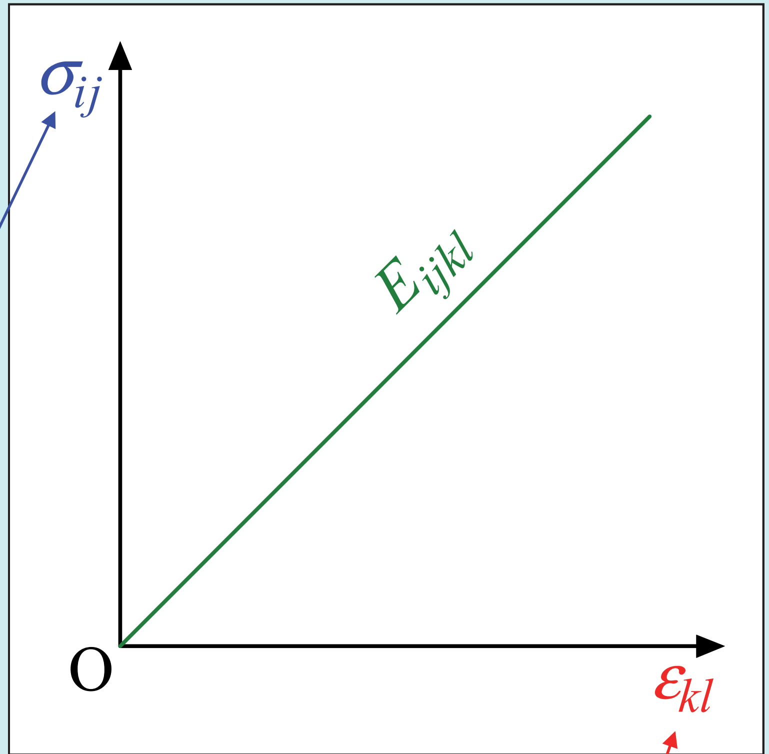
線形弾性体

線形弾性体

応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ とひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ の各成分が線形関係を有する固体.

応力テンソル

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



ひずみテンソル

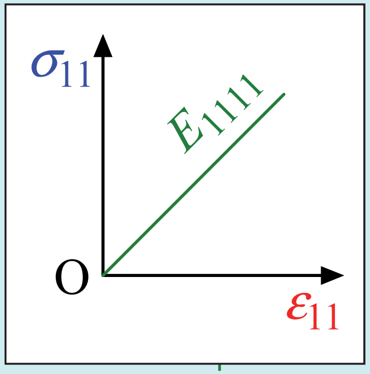
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

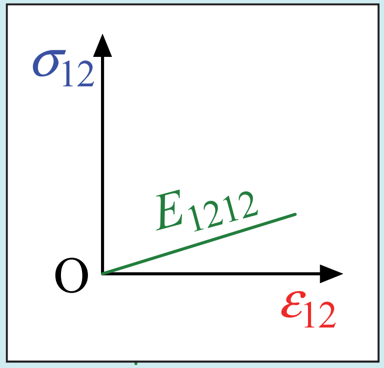
線形弾性体の構成式

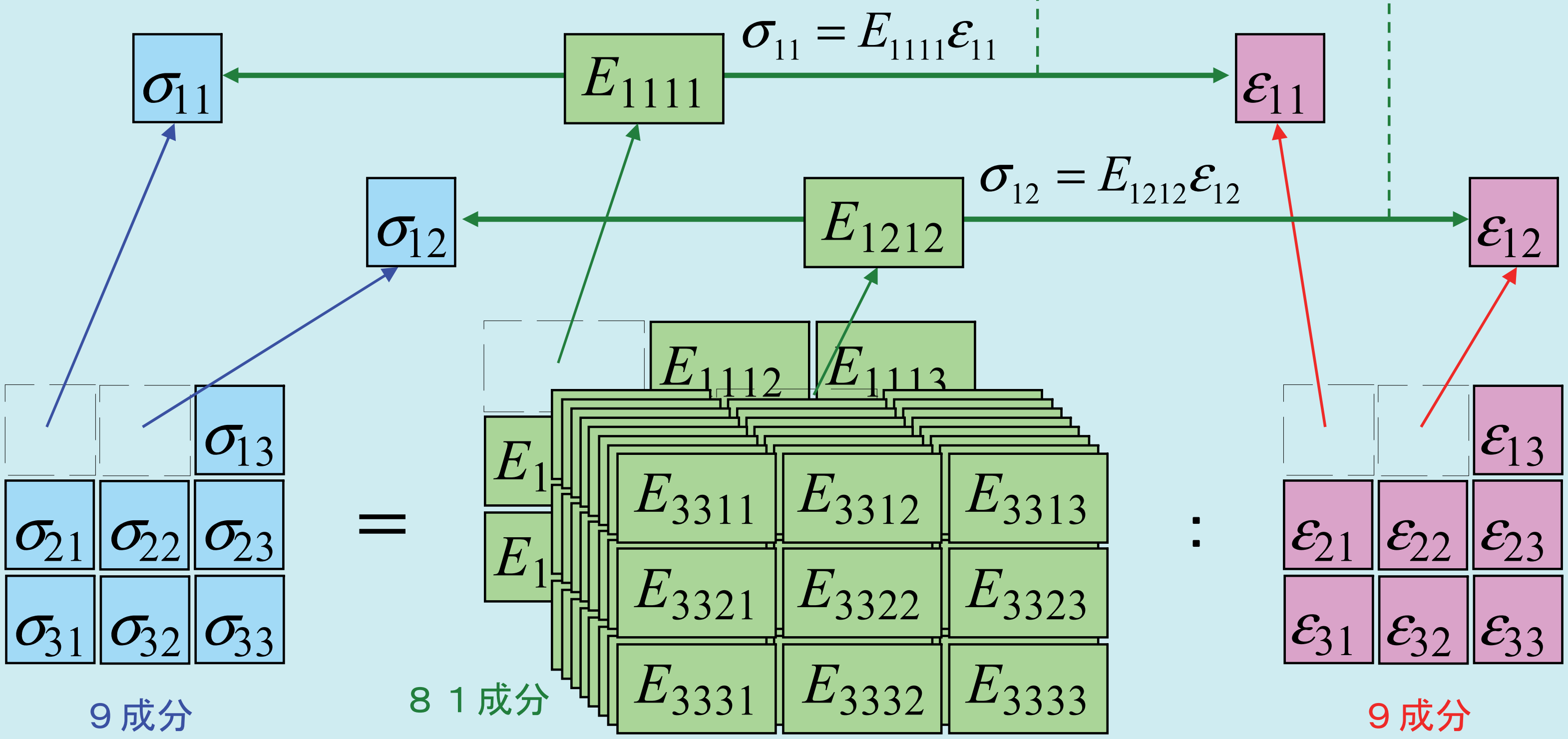
指標表現 $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

シンボリック表現 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$

弾性係数テンソル







弾性係数テンソルの階数

指標表現 $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

テンソルの商法則により $\boldsymbol{E}$ は４階のテンソルであることがわかる.

シンボリック表現 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$

４階のテンソル $\boldsymbol{E}$

２階のテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$

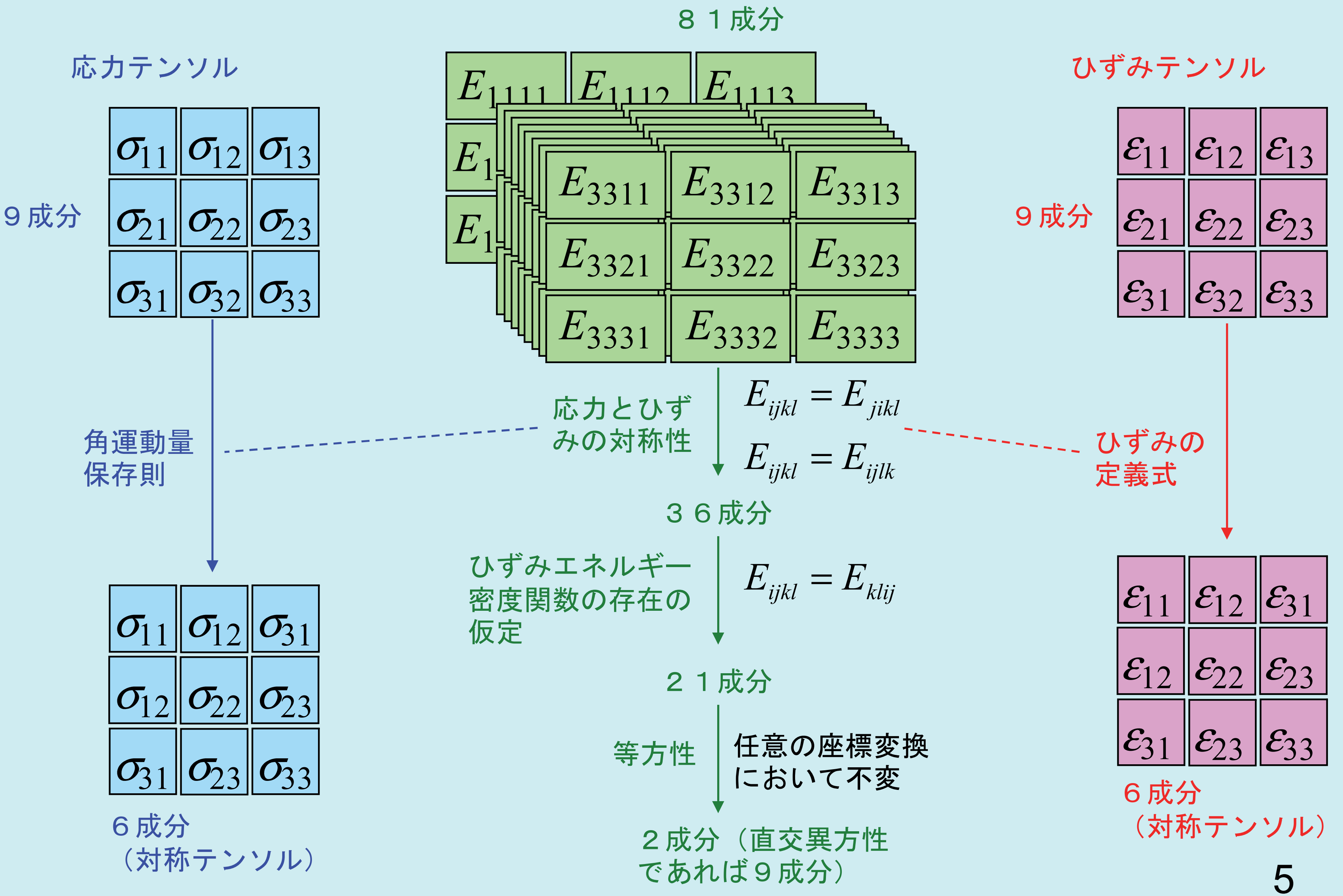
$\xrightarrow{\text{テンソル積}}$ $E_{ijkl}\varepsilon_{mn}$ $\xrightarrow[(k=m)]{\text{縮約}}$ $E_{ijkl}\varepsilon_{kn}$ $\xrightarrow[(l=n)]{\text{縮約}}$ $E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

６（＝４＋２）階のテンソル

４（＝６－２）階のテンソル

２（＝４－２）階のテンソル

弾性係数テンソル内の独立成分



一般化フックの法則（ひずみから応力を計算）

縦弾性係数

ポアソン比

指標表現

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)$$

シンボリック表現

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{I}\right)$$

等方線形弾性体の構成式

Eと νが独立な２成分

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\left\{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

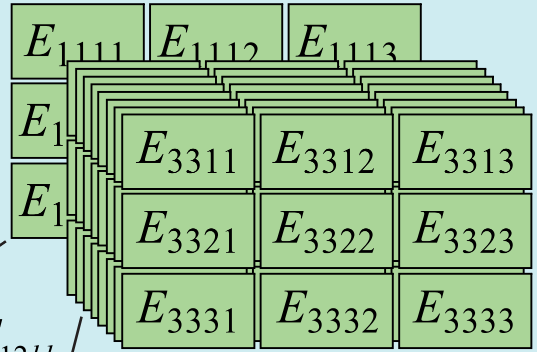
展開表現

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\}, \sigma_{22} = \cdots, \sigma_{33} = \cdots$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}, \sigma_{23} = \cdots, \sigma_{31} = \cdots$$

一般化フックの法則と弾性係数テンソルの対応

弾性係数テンソル



一般化フックの法則

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) \longleftrightarrow \sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

E_{11kl}

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{11} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}}_{E_{1111}}\varepsilon_{11} + \underbrace{\boxed{\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}}_{E_{1122}}\varepsilon_{22} + \underbrace{\boxed{\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}}_{E_{1133}}\varepsilon_{33}$$

これら以外の E_{11kl} 成分は0.　$E_{1112} = E_{1113} = \cdots = 0$

E_{12kl}

$$\sigma_{12} = \underbrace{\boxed{\frac{E}{1+\nu}}}_{2E_{1212}}\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{12} = E_{1212}\varepsilon_{12} + E_{1221}\varepsilon_{21} = 2E_{1212}\varepsilon_{12}$$

E_{1212} と E_{1221} 以外のE_{12kl}成分は0.

$E_{1211} = E_{1213} = \cdots = 0$

一般化フックの法則の式（左上）では，σ_{ij}に対するε_{ji}成分（この例ではσ_{12}に対するε_{21}）の項がすでに消去されている．

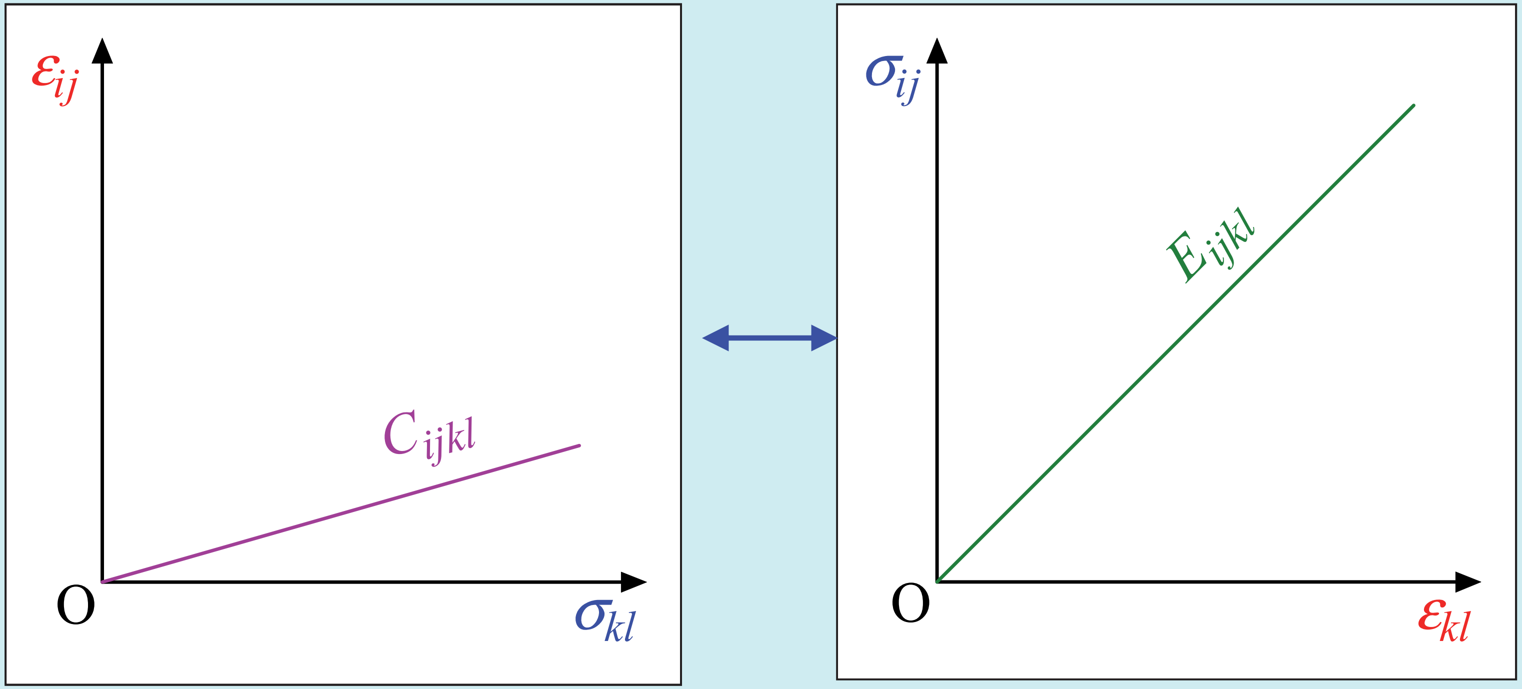
弾性コンプライアンス係数テンソル

弾性コンプライアンス
係数テンソル

指標表現 $\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}$

シンボリック表現 $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\sigma}$

弾性係数テンソル$\boldsymbol{E}$と同様に弾性コンプライアンス係数テンソル $\boldsymbol{C}$ も４階のテンソルである.



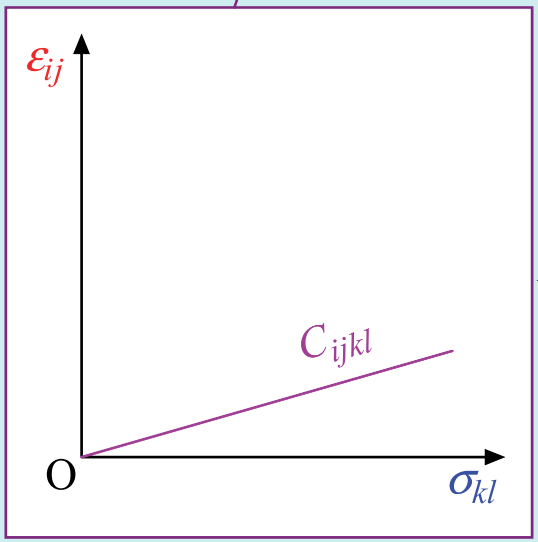
弾性コンプライアンス係数テンソルと弾性係数テンソルの関係（その１）

弾性コンプライアンス係数テンソル

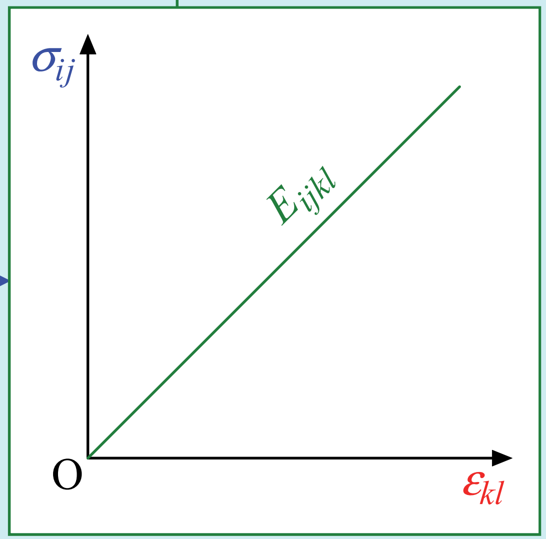
$$\varepsilon_{ij} = C_{ij11}\sigma_{11} + C_{ij12}\sigma_{12} + \cdots + C_{ijkl}\sigma_{kl} + \cdots + C_{ij33}\sigma_{33}$$

弾性係数テンソル

$$\sigma_{ij} = E_{ij11}\varepsilon_{11} + E_{ij12}\varepsilon_{12} + \cdots + E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \cdots + E_{ij33}\varepsilon_{33}$$



$$C_{ijkl} \neq \frac{1}{E_{ijkl}}$$



弾性コンプライアンス係数テンソルと弾性係数テンソルの関係（その２）

$$C_{ijkl} \neq \frac{1}{E_{ijkl}}$$

の関係は，以下のa_{ij}とb_{ij}の関係と同じである．

例えば

$$a_{11} \neq \frac{1}{b_{11}} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{cases}$$

$$a_{ij} \neq \frac{1}{b_{ij}}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

一般化フックの法則（応力からひずみを計算）

ポアソン比

指標表現

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

縦弾性係数

等方線形弾性体の構成式

Eと νが独立な２成分

シンボリック表現

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{I}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

展開表現

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\{\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\}, \varepsilon_{22} = \cdots, \varepsilon_{33} = \cdots$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}, \varepsilon_{23} = \cdots, \varepsilon_{31} = \cdots$$

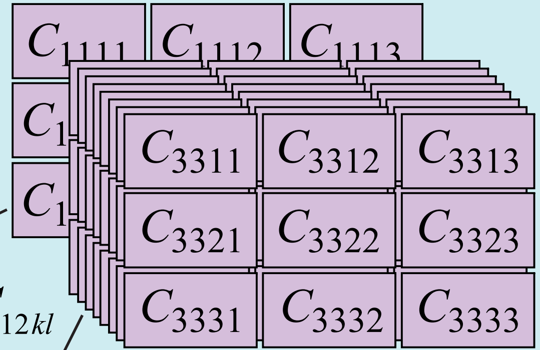
一般化フックの法則と弾性コンプライアンス係数テンソルの対応

一般化フックの法則

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}$$

弾性コンプライアンス係数テンソル



C_{11kl}

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{E}}\sigma_{11}\boxed{-\frac{\nu}{E}}\sigma_{22}\boxed{-\frac{\nu}{E}}\sigma_{33}}$$

C_{1111} C_{1122} C_{1133}

これら以外の C_{11kl} 成分は0.

$$C_{1112} = C_{1113} = \cdots = 0$$

C_{12kl}

$$\varepsilon_{12} = \boxed{\frac{1+\nu}{E}}\sigma_{12}$$

$2C_{1212}$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= C_{1212}\sigma_{12} \\ &\quad + C_{1221}\sigma_{21} \\ &= 2C_{1212}\sigma_{12}\end{aligned}$$

C_{1212} と C_{1221} 以外の C_{12kl} 成分は0.

$$C_{1211} = C_{1213} = \cdots = 0$$

一般化フックの法則の偏差応力と偏差ひずみを用いた表現

偏差応力

偏差ひずみ

指標表現

$$\frac{\sigma'_{ij}}{\varepsilon'_{ij}} = \frac{E}{1+\nu} = 2G$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

シンボリック表現

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\boldsymbol{\varepsilon}'} = \frac{E}{1+\nu} = 2G$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{I}$$

展開表現

$$\frac{\sigma'_{11}}{\varepsilon'_{11}} = \frac{\sigma'_{22}}{\varepsilon'_{22}} = \frac{\sigma'_{33}}{\varepsilon'_{33}} = \frac{\sigma'_{12}}{\varepsilon'_{12}} = \frac{\sigma'_{23}}{\varepsilon'_{23}} = \frac{\sigma'_{31}}{\varepsilon'_{31}} = \frac{E}{1+\nu} = 2G$$

$$\frac{\sigma_{11} - \sigma_m}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_m} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_m}{\varepsilon_{22} - \varepsilon_m} = \frac{\sigma_{33} - \sigma_m}{\varepsilon_{33} - \varepsilon_m} = \frac{\sigma_{12}}{\varepsilon_{12}} = \frac{\sigma_{23}}{\varepsilon_{23}} = \frac{\sigma_{31}}{\varepsilon_{31}} = \frac{E}{1+\nu} = 2G$$

平均垂直ひずみ

平均垂直応力

ラメ（Lamé）の定数

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

ラメの定数

指標表現 $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

シンボリック表現 $\boldsymbol{\sigma} = \lambda \,\mathrm{tr}\, \boldsymbol{\varepsilon}\, \boldsymbol{I} + 2\mu\, \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

展開表現

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}$$
$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}$$
$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}$$
$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}, \sigma_{31} = 2\mu\varepsilon_{31}$$

λ と μ が独立な２成分

体積弾性係数

体積ひずみ

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

体積弾性係数

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

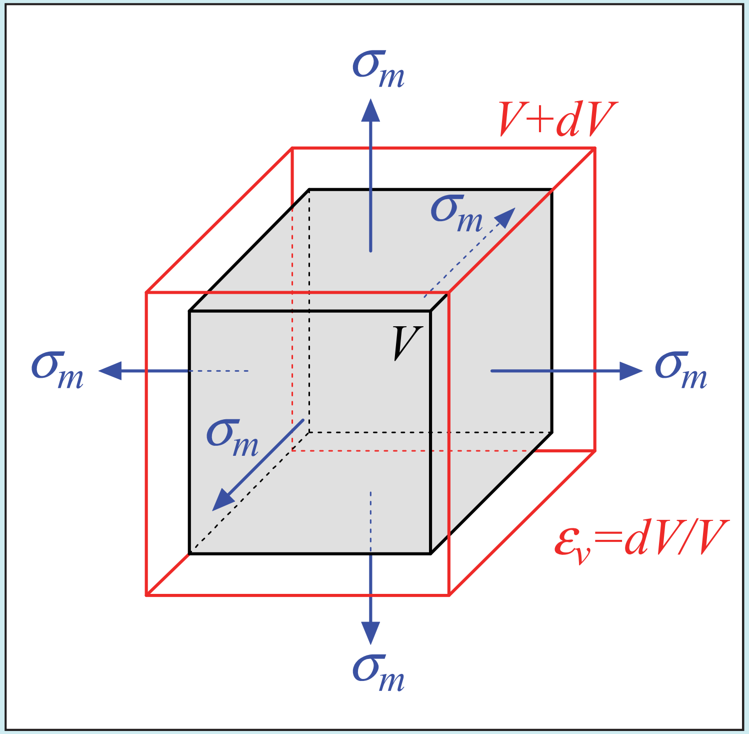
材料を単位の体積ひずみだけ変形させるのに要する平均応力

平均応力と体積ひずみの関係式

$$\sigma_m = K\varepsilon_v$$

平均応力

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$



弾性係数間の関係

等方弾性体における各弾性係数間の関係

	G	K	E	ν	μ	λ
G and K	G	K	$\dfrac{9GK}{G+3K}$	$\dfrac{3K-2G}{2(G+3K)}$	G	$K-\dfrac{2}{3}G$
E and ν	$\dfrac{E}{2(1+\nu)}$	$\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$	E	ν	$\dfrac{E}{2(1+\nu)}$	$\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
μ and λ	μ	$\lambda+\dfrac{2}{3}\mu$	$\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	μ	λ

等方弾性体では独立な
弾性係数は２つ

構成式の行列表現

指標表現 $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

シンボリック表現 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$

４階のテンソルである弾性係数テンソルは，本来であれば行列で表現することはできないが，応力テンソルとひずみテンソルを列行列の形に並べ替えることにより行列表現が可能となる.

行列表現

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1123} & E_{1131} & E_{1112} \\ (E_{2211}) & E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} & E_{2231} & E_{2212} \\ (E_{3311}) & (E_{3322}) & E_{3333} & E_{3323} & E_{3331} & E_{3312} \\ (E_{2311}) & (E_{2322}) & (E_{2333}) & E_{2323} & E_{2331} & E_{2312} \\ (E_{3111}) & (E_{3122}) & (E_{3133}) & (E_{3123}) & E_{3131} & E_{3112} \\ (E_{1211}) & (E_{1222}) & (E_{1233}) & (E_{1223}) & (E_{1231}) & E_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$E_{ijkl} = E_{klij}$$

Voigtの表記

行列表現

$$
\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1123} & E_{1131} & E_{1112}\\
 & E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} & E_{2231} & E_{2212}\\
 & & E_{3333} & E_{3323} & E_{3331} & E_{3312}\\
 & & & E_{2323} & E_{2331} & E_{2312}\\
 & \text{(sym.)} & & & E_{3131} & E_{3112}\\
 & & & & & E_{1212}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{31}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}
$$

Voigtの表記に基づく添字の変更

$11 \to 1$

$22 \to 2$

$33 \to 3$

$23 \to 4$

$31 \to 5$

$12 \to 6$

行列表現（Voigtの表記）

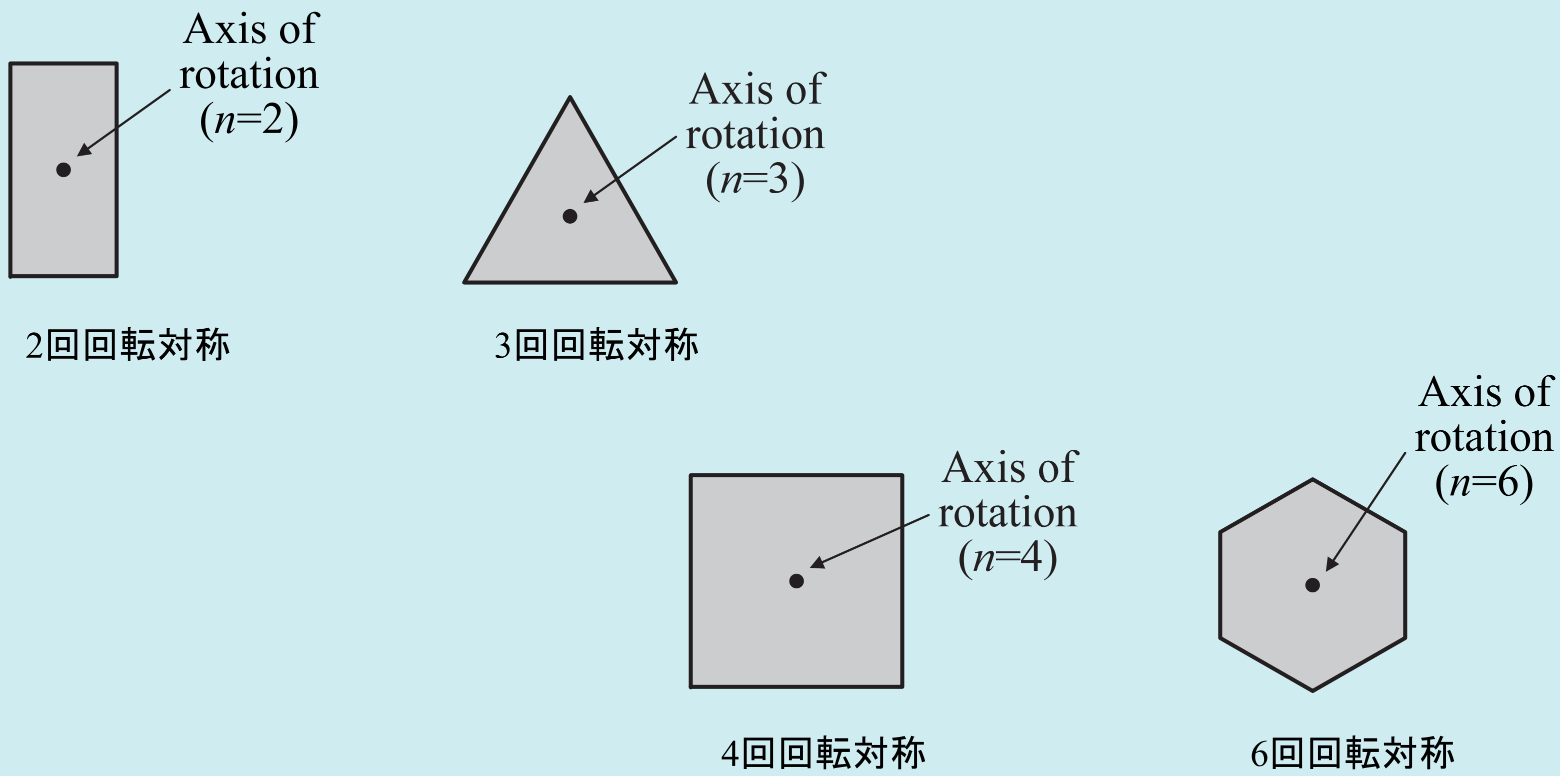
$$
\begin{bmatrix}\sigma_{1}\\ \sigma_{2}\\ \sigma_{3}\\ \sigma_{4}\\ \sigma_{5}\\ \sigma_{6}\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16}\\
 & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26}\\
 & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36}\\
 & & & E_{44} & E_{45} & E_{46}\\
 & \text{(sym.)} & & & E_{55} & E_{56}\\
 & & & & & E_{66}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\varepsilon_{1}\\ \varepsilon_{2}\\ \varepsilon_{3}\\ \varepsilon_{4}\\ \varepsilon_{5}\\ \varepsilon_{6}\end{bmatrix}
=
\left(
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16}\\
 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26}\\
 & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36}\\
 & & & c_{44} & c_{45} & c_{46}\\
 & \text{(sym.)} & & & c_{55} & c_{56}\\
 & & & & & c_{66}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\varepsilon_{1}\\ \varepsilon_{2}\\ \varepsilon_{3}\\ \varepsilon_{4}\\ \varepsilon_{5}\\ \varepsilon_{6}\end{bmatrix}
\right)
$$

$\varepsilon_i\ (i = 4 \sim 6)$：工学せん断ひずみ（$\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$）と同じ

$$\boxed{2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4, 2\varepsilon_{31} = \varepsilon_5, 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6}$$

物体の対称性

物体（結晶，格子）をある軸周りに回転させたとき，$2\pi/n$ [rad]で元と重なるとき，その物体は，n回の回転対称であると言い，また，その回転軸をn回対称軸と言う．



独立な弾性係数の個数（その１）

一般の線形弾性体

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_4\\\sigma_5\\\sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}&c_{15}&c_{16}\\&c_{22}&c_{23}&c_{24}&c_{25}&c_{26}\\&&c_{33}&c_{34}&c_{35}&c_{36}\\&&&c_{44}&c_{45}&c_{46}\\&\text{(sym.)}&&&c_{55}&c_{56}\\&&&&&c_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\\\varepsilon_6\end{bmatrix}$$

独立な成分は２１個

直交異方線形弾性体
（斜方晶系単結晶体）

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_4\\\sigma_5\\\sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&0&0&0\\&c_{22}&c_{23}&0&0&0\\&&c_{33}&0&0&0\\&&&c_{44}&0&0\\&\text{(sym.)}&&&c_{55}&0\\&&&&&c_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\\\varepsilon_6\end{bmatrix}$$

独立な成分は９個

互いに直交する３本の
２回対称軸を有する.

独立な弾性係数の個数（その２）

六方対称線形弾性体
（六方晶系単結晶体）

独立な成分は５個

６回対称軸を有する.

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0\\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0\\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0\\ & & & c_{44} & 0 & 0\\ & \text{(sym.)} & & & c_{44} & 0\\ & & & & & \dfrac{c_{11}-c_{12}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}$$

立方対称線形弾性体
（立方晶系単結晶体）

独立な成分は３個

互いに直交する３本の
４回対称軸を有する.

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0\\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0\\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0\\ & & & c_{44} & 0 & 0\\ & \text{(sym.)} & & & c_{44} & 0\\ & & & & & c_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}$$

等方線形弾性体

独立な成分は２個

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0\\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0\\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0\\ & & & \dfrac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0\\ & \text{(sym.)} & & & \dfrac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0\\ & & & & & \dfrac{c_{11}-c_{12}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}$$

構成式の行列表現（工学的表記，　ひずみから応力を計算）

行列表現（工学的表記）

$$
\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}
$$

ひずみ（応力）テンソルの各成分と工学ひずみ（応力）の関係

$$\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z, \sigma_{23} = \tau_{yz}, \sigma_{31} = \tau_{zx}, \sigma_{12} = \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_x, \varepsilon_{22} = \varepsilon_y, \varepsilon_{33} = \varepsilon_z, \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{xy}}{2}, \varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{yz}}{2}, \varepsilon_{31} = \frac{\gamma_{zx}}{2}$$

横弾性係数と縦弾性係数，
ポアソン比の関係

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

EとGとνのうち独立なのは２つ

構成式の行列表現（工学的表記，　応力からひずみを計算）

行列表現（工学的表記）

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}
$$

ひずみ（応力）テンソルの各成分
と工学ひずみ（応力）の関係

$$
\varepsilon_{11} = \varepsilon_x, \varepsilon_{22} = \varepsilon_y, \varepsilon_{33} = \varepsilon_z,
$$

$$
\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{xy}}{2}, \varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{yz}}{2}, \varepsilon_{31} = \frac{\gamma_{zx}}{2}
$$

$$
\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z,
$$

$$
\sigma_{23} = \tau_{yz}, \sigma_{31} = \tau_{zx}, \sigma_{12} = \tau_{xy}
$$

横弾性係数と縦弾性係数，
ポアソン比の関係

$$
G = \frac{E}{2(1+\nu)}
$$

E と G と ν のうち独立なのは２つ

各種等方材料の縦弾性係数とポアソン比

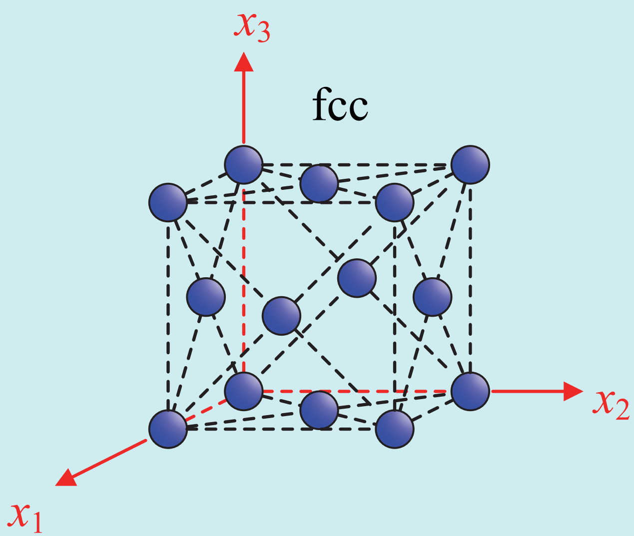
物質名	縦弾性係数 E (GPa)	ポアソン比 ν
アルミニウム（Al）	70.3	0.345
金（Au）	78.0	0.44
銅（Cu）	129.8	0.343
鉄（軟鉄，Fe）	211.4	0.293
白金（Pt）	168.0	0.377
チタン（Ti）	115.7	0.321
ジュラルミン	71.5	0.335
ガラス（フリント）	80.1	0.27
ゴム（弾性）	0.0015 – 0.0050	0.46 – 0.49
ポリエチレン	0.4 – 1.3	0.458
ポリスチレン	2.7 – 4.2	0.340

ジュラルミン：Al-Cu-Mg系アルミニウム合金

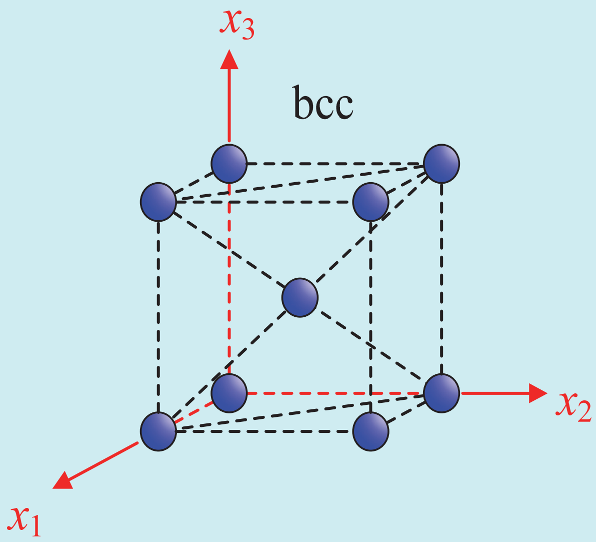
参考：国立天文台編，理科年表，丸善（2001）

金属材料の代表的な結晶格子（結晶系）と座標系

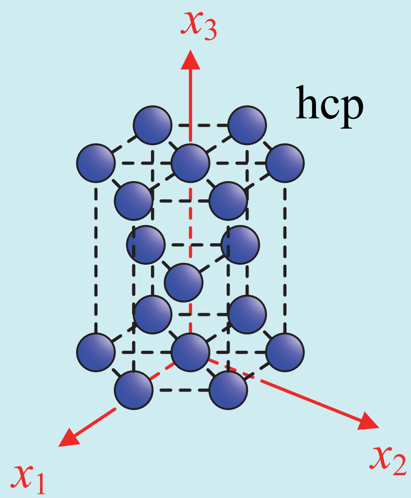
面心立方格子（立方晶系）



体心立方格子（立方晶系）



最密六方格子（六方晶系）



各種単結晶金属材料の弾性係数

独立な成分は３個

物質名	結晶系	温度 T (K)	c_{11} (GPa)	c_{33} (GPa)	c_{44} (GPa)	c_{66} (GPa)	c_{12} (GPa)	c_{13} (GPa)
アルミニウム (Al)	立方晶	300	106.8	$(=c_{11})$	28.2	$(=c_{44})$	60.7	$(=c_{12})$
金 (Au)	立方晶	300	192.3	$(=c_{11})$	42.0	$(=c_{44})$	163.1	$(=c_{12})$
銅 (Cu)	立方晶	300	168.4	$(=c_{11})$	75.4	$(=c_{44})$	121.4	$(=c_{12})$
マグネシウム (Mg)	六方晶	298	59.7	61.7	16.4	$(=(c_{11}-c_{12})/2)$	26.2	21.7
チタン (Ti)	六方晶	298	162.4	180.7	46.7	$(=(c_{11}-c_{12})/2)$	92.0	69.0

独立な成分は５個

参考：日本金属学会編，改訂３版　金属データブック，丸善（2000）

等方線形熱弾性体の構成式（ひずみと温度変化幅からひずみを計算）

（応力）＝（力学的ひずみによって生じる応力）＋（熱ひずみによって生じる応力）

指標表現

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) - \beta\,\Delta T\,\delta_{ij}$$

温度変化幅

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \beta\,\Delta T\,\delta_{ij}$$

（ラメの定数を用いた表現）

シンボリック表現

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{I}\right) - \beta\,\Delta T\,\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{I} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon} - \beta\,\Delta T\,\boldsymbol{I}$$

（ラメの定数を用いた表現）

等方線形熱弾性体の構成式（応力と温度変化幅からひずみを計算）

（ひずみ）＝（力学的応力によって生じるひずみ）＋（熱によって生じるひずみ）

指標表現

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha\,\Delta T\,\delta_{ij}$$

シンボリック表現

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{I} + \alpha\,\Delta T\,\boldsymbol{I}$$

温度変化幅

線膨張係数

$$\alpha = \frac{\beta}{3\lambda + 2\mu}$$

物体の温度が1K上昇したときに生じるひずみ

$$\alpha = \frac{1}{l}\cdot\frac{dl}{dT}$$

各種材料の線膨張係数

物質名	線膨張係数 $\alpha\,(\times 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1})$
アルミニウム（Al）	23.1
金（Au）	14.2
銅（Cu）	16.5
鉄（Fe）	11.8
白金（Pt）	8.8
チタン（Ti）	8.6
ジュラルミン	21.6
ガラス（フリント）	8 – 9
ゴム（弾性）	77
ポリエチレン	100 – 200
ポリスチレン	34 – 210

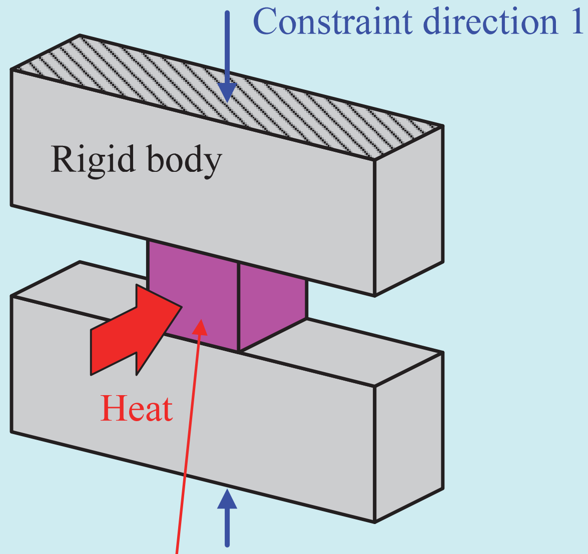
参考：国立天文台編，理科年表，
丸善（2001）

熱応力（１軸拘束）

１軸拘束

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta T} = -\alpha E$$

$\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta T}$: 1Kの温度変動によって生じる熱応力



$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \alpha(\Delta T) = 0$$

$$\sigma_{11} = -\alpha E(\Delta T)$$

ΔTが正（温度上昇）のときに発生する応力は負（圧縮）

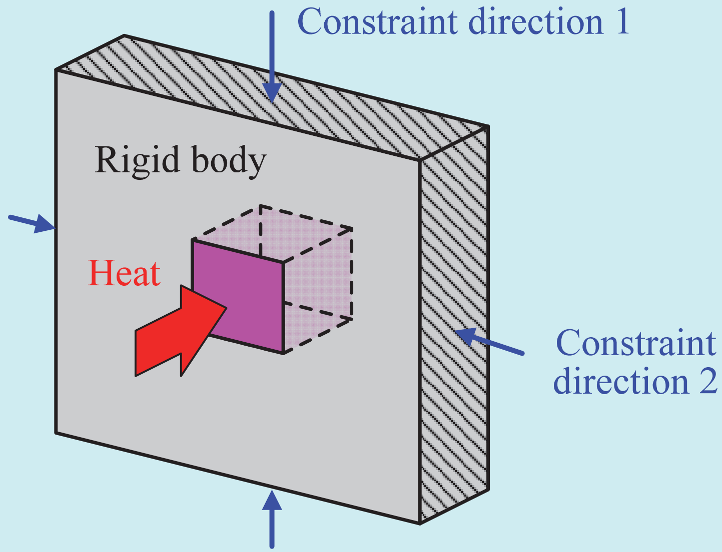
熱応力（２軸拘束）

２軸拘束

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta T} = -\frac{1}{1-\nu}\alpha E$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) + \alpha(\Delta T) = 0 \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} \end{cases}$$

$$\sigma_{11} = -\frac{\alpha E}{1-\nu}(\Delta T)$$



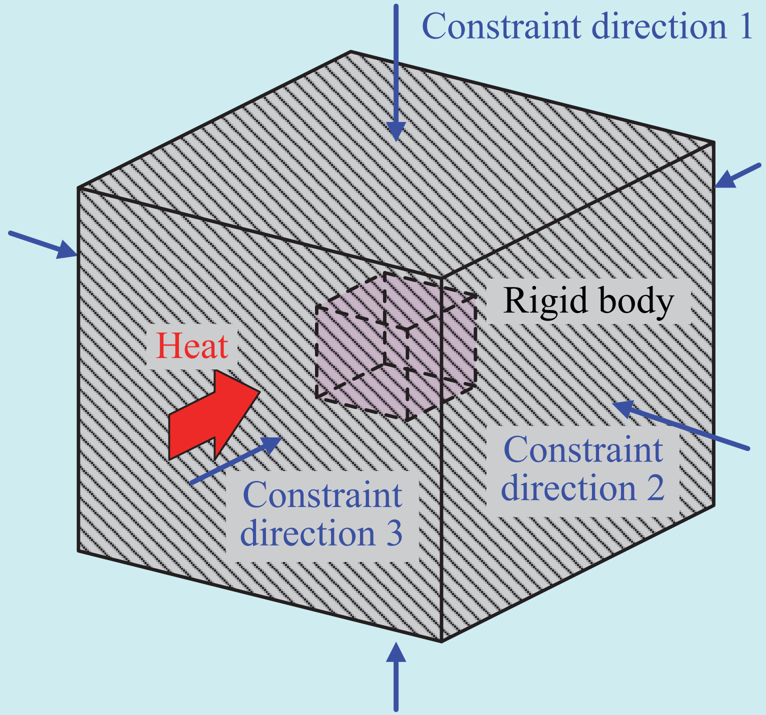
熱応力（３軸拘束）

３軸拘束

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta T} = -\frac{1}{1-2\nu}\alpha E$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right) + \alpha\left(\Delta T\right) = 0 \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} \end{cases}$$

$$\sigma_{11} = -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\left(\Delta T\right)$$



線膨張係数と縦弾性係数の関係

等しい熱応力を生じさせるαーE関係