行列と総和規約

Kronecker delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

permutation symbol

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & (\text{even permutation}) \\ -1 & (\text{odd permutation}) \\ 0 & (\text{others}) \end{cases}$$

eigenvalue

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

determinant

$$\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt}$$

行列

行

３×３正方行列

要素

$$\boldsymbol{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & \boxed{A_{23}} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$(i, j = 1,2,3)$

列

行列（matrix）

３×１の列の行列（３次の列ベクトル）

$$\boldsymbol{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

１×３の行の行列（３次の行ベクトル）

$$\boldsymbol{a}^T = [a_i]^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

行列（列ベクトル）の表記

行列

$$\boldsymbol{A} \quad \text{- - -} \quad [A_{ij}] \quad \text{- - -} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

行列の要素

$$A_{ij}$$

$$(i, j = 1,2,3)$$

列ベクトル

$$\boldsymbol{a} \quad \text{- - -} \quad [a_i] \quad \text{- - -} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

列ベクトルの要素

$$a_i$$

$$(i = 1,2,3)$$

行列の和とスカラー倍

和

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} & A_{33}+B_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}-B_{11} & A_{12}-B_{12} & A_{13}-B_{13} \\ A_{21}-B_{21} & A_{22}-B_{22} & A_{23}-B_{23} \\ A_{31}-B_{31} & A_{32}-B_{32} & A_{33}-B_{33} \end{bmatrix}$$

スカラー倍

$$c\boldsymbol{A}=c\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cA_{11} & cA_{12} & cA_{13} \\ cA_{21} & cA_{22} & cA_{23} \\ cA_{31} & cA_{32} & cA_{33} \end{bmatrix}$$

$(c:$スカラー$)$

行列の積

第１行

第２列

積

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

（1， 2）要素

$$=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32} & A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}+A_{13}B_{33} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}+A_{23}B_{33} \\ A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21}+A_{33}B_{31} & A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22}+A_{33}B_{32} & A_{31}B_{13}+A_{32}B_{23}+A_{33}B_{33} \end{bmatrix}$$

積の（i,j）成分

行列$\boldsymbol{A}$の第i行

$$(\boldsymbol{AB})_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+A_{i3}B_{3j}$$

$$=\sum_{k=1}^{3}A_{ik}B_{kj}$$

行列$\boldsymbol{B}$の第j列

行列$\boldsymbol{A}$の第i行要素とそれに対応する行列$\boldsymbol{B}$の第j列要素の積の和

行列のべきと演算法則

行列のべき

$$A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n}$$

行列の和

$$A + B = B + A$$

交換法則

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

結合法則

行列のスカラー倍

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

行列の積

$$AB \neq BA$$

~~交換法則~~

$$(AB)C = A(BC)$$

結合法則

$$(A+B)C = AC + BC$$
$$A(B+C) = AB + AC$$

分配法則

転置行列

$$\boldsymbol{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

転置

行と列を入れ替える

$$\boldsymbol{A}^T = [A_{ij}]^T = [A_{ji}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

転置

$$\boldsymbol{a}^T = [a_i]^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T$$

転置行列（transposed matrix）

対称行列と逆対称行列

対称行列

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$　　$A_{ij} = A_{ji}$　$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ (A_{12}) & A_{22} & A_{23} \\ (A_{13}) & (A_{23}) & A_{33} \end{bmatrix}$$

独立な成分は６個

対称行列（symmetric matrix）

逆対称行列

$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$　　$A_{ij} = -A_{ji}$　$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ (-A_{12}) & 0 & A_{23} \\ (-A_{13}) & (-A_{23}) & 0 \end{bmatrix}$$

独立な成分は３個

逆対称（反対称）行列（antisymmetric matrix）

トレースと単位行列，零行列

トレース

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

単位行列（恒等行列）

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

単位行列の性質

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{I}^n = \underbrace{\boldsymbol{I}\cdots\boldsymbol{I}}_{n} = \boldsymbol{I} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

零行列

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

零行列の性質

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{AO} = \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{O}$$

クロネッカーのデルタと置換記号

$(i, j = 1,2,3)$

クロネッカーのデルタ

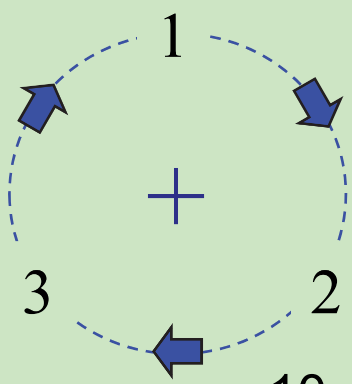
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$
$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$$

置換記号

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k)\text{が}(1,2,3)\text{の偶置換のとき} \\ -1 & (i,j,k)\text{が}(1,2,3)\text{の奇置換のとき} \\ 0 & (i,j,k)\text{のうち2つ以上が等しいとき} \end{cases}$$

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$$
$$e_{132} = e_{213} = e_{321} = -1$$
$$e_{112} = e_{333} = 0$$



置換

n文字の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

n個の文字を同じn個の文字に対応させる変換のこと（n個の文字の並べ替え）

$$\begin{array}{c} 1 \to i_1 \\ 2 \to i_2 \\ \vdots \\ n \to i_n \end{array}$$

恒等置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

逆置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ある置換と逆の文字を対応させる置換

置換の符号

置換の符号

置換の上段の数が大きさの順に並んでいるとき，下段の数字の大小をすべて比較する．そして，下段の数字の並びについて，左側の数字の方が右側の数字より大きい場合の数が偶数となる置換を偶置換（符号+1），奇数となる置換を奇置換（符号–1）と定める.

置換符号の例

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = +1$$

$$\left.\begin{array}{lll} 3 \leftrightarrow 1 & (3>1) & \bigcirc \\ 1 \leftrightarrow 2 & (1<2) & \times \\ 3 \leftrightarrow 2 & (3>2) & \bigcirc \end{array}\right\} 2\text{個}$$

→ 偶置換 → $\operatorname{sgn}(\quad) = +1$

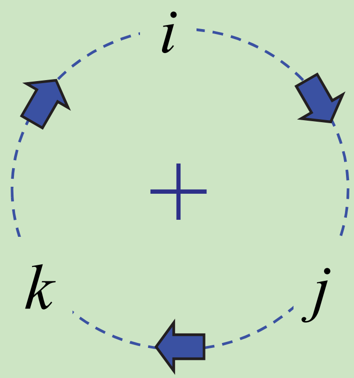
クロネッカーのデルタと置換記号の性質と使用例

クロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

置換記号

$$e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij} = -e_{ikj} = -e_{jik} = -e_{kji}$$



使用例（単位行列とそのトレース）

$$\boldsymbol{I} = [\delta_{ij}]$$
$$= \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(i, j = 1,2,3)$$

$$\mathrm{tr}\, \boldsymbol{I} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = 3$$

行列式（置換記号を用いた表現）

参考（２×２正方行列の場合）

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} e_{ijk}e_{rst}A_{ir}A_{js}A_{kt} \\ &= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} \\ &\quad - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} \end{aligned}$$

小行列式と余因子

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & & A_{ij} & & A_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

小行列式

除去

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & & A_{ij} & & A_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

除去

元の行列からi行とj列を
除いた $(n\text{-}1)\times(n\text{-}1)$行列
の行列式

余因子

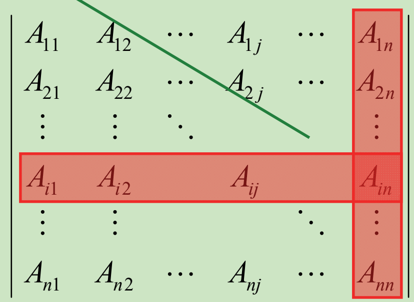
$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

行列式（余因子を用いた表現）

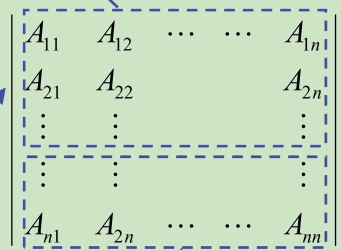
第 i 行で展開した場合

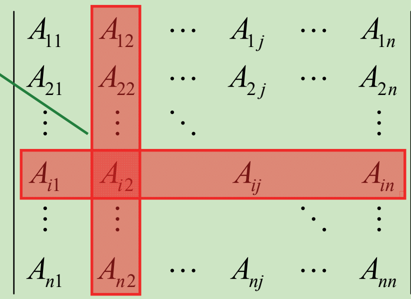
$$\det \boldsymbol{A} = A_{i1}C_{i1} + A_{i2}C_{i2} + \cdots + A_{in}C_{in}$$

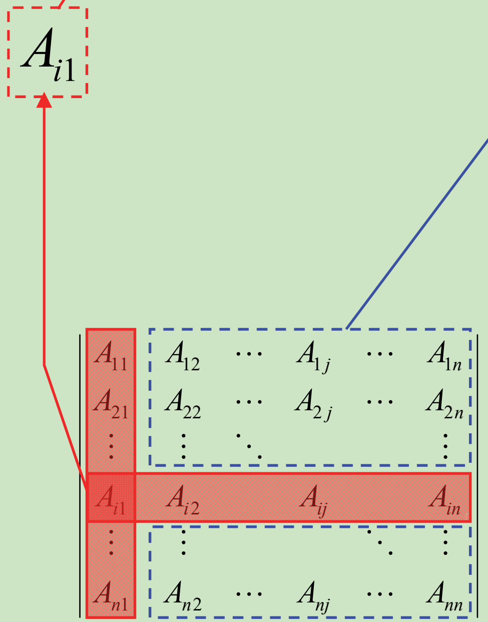
$$(1 \le i \le n)$$



$$\times(-1)^{i+1}$$







第 j 列で展開した場合

$$\det \boldsymbol{A} = A_{1j}C_{1j} + A_{2j}C_{2j} + \cdots + A_{nj}C_{nj}$$

行列式の余因子展開の例

3×3の行列式を第1行で展開した場合

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boxed{A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13}} \\ A_{21} \quad A_{22} \quad A_{23} \\ A_{31} \quad A_{32} \quad A_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{A_{11}} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - \boxed{A_{12}} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + \boxed{A_{13}} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

$$= A_{11}\left(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}\right) - A_{12}\left(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}\right)$$

$$+ A_{13}\left(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}\right)$$

$$= A_{11}A_{22}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33}$$

$$+ A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31}$$

行列式の性質（その１）

行列式の行と列を交換してもその値は変わらない.

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^T$$

どの行で展開してもどの列で展開しても行列式の値は変わらない.

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A} &= A_{i1}C_{i1} + A_{i2}C_{i2} + \cdots + A_{in}C_{in} \\ &= A_{1j}C_{1j} + A_{2j}C_{2j} + \cdots + A_{nj}C_{nj}\end{aligned}$$

第 i 行

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & & A_{ij} & & A_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

第 j 列

ある行（または列）の要素がすべて0ならば行列式は0である.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

行列式の性質（その２）

行列式の任意の2行（または2列）を交換すると，その値は符号だけ変わる．

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } p \text{ 行} \\ \\ \text{第 } q \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \cdots & A_{qj} & \cdots & A_{qn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \cdots & A_{qj} & \cdots & A_{qn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式の1つの行（または列）のすべての要素に同一の数をかけて得られる行列式の値は，
もとの行列式の値にその数をかけたものに等しい．

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ cA_{i1} & \cdots & cA_{ij} & \cdots & cA_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

行列のスカラー倍と
は違うことに注意

行列式の性質（その３）

2つの行（または列）の対応する要素が比例しているならば，行列式は0である.

$$
\begin{vmatrix}
A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
cA_{i1} & \cdots & cA_{ij} & \cdots & cA_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn}
\end{vmatrix} = 0
$$

行列式の任意の行（または列）のすべての要素に同じ数をかけて，これを他の行（または列）の対応する要素に加えても行列式の値は変わらない.

$$
\times c \quad
\begin{vmatrix}
A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{p1} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{q1} & \cdots & A_{qj} & \cdots & A_{qn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{p1}+cA_{q1} & \cdots & A_{pj}+cA_{qj} & \cdots & A_{pn}+cA_{qn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{q1} & \cdots & A_{qj} & \cdots & A_{qn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn}
\end{vmatrix}
$$

逆行列

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

$n \times n$正方行列の逆行列

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ C_{1i} & C_{2i} & & C_{ji} & & C_{ni} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

余因子の添字に注意

（iとjが逆になっている）

余因子

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

正則行列と直交行列

正則行列

行列式が 0 でない行列 ＝ 逆行列が存在する

$$\det \boldsymbol{A} \neq 0$$

直交行列

転置行列が逆行列になる行列

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{T}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{T} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

固有値と固有ベクトル（その１）

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

３×３正方行列の場合

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

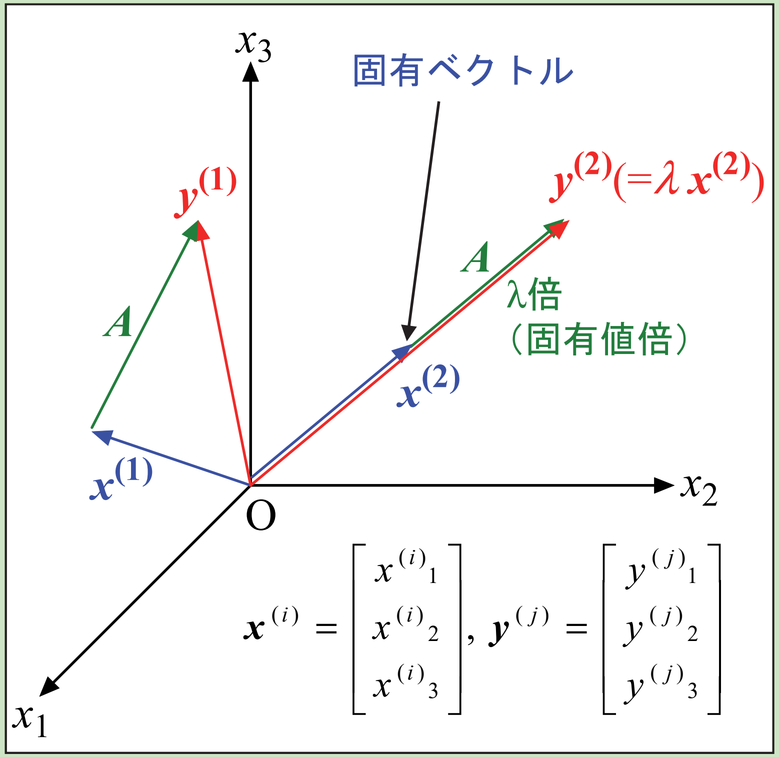
固有値

固有ベクトル

固有値と固有ベクトル

上式を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ は，行列 $\boldsymbol{A}$ の作用をスカラー λ を乗ずることと同じ働きにしてしまう特別なベクトル.

固有値と固有ベクトル（その２）



線形変換

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

固有値と固有ベクトル

線形変換 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$ でベクトル $\boldsymbol{x}$ として特定の向きのものを取ると，$y=a\,x$ と同様の比例関係を持つことになる.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

特性方程式の導出（その１）

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

３×３正方行列の場合

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

零ベクトル

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

特性方程式の導出（その２）

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}$ が非自明の解を持つためには

（零ベクトルは固有ベクトルとみなさない）

特性方程式

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

固有値

$$\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$$

３×３正方行列の場合

$$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

または

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$$

対角化の条件と方法（その１）

対角化の条件

n 次の正方行列 A が対角化できるための必要十分条件は，A が線形独立な n 個の固有ベクトルを持つことである．

固有ベクトルの番号

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x^{(1)}{}_1 \\ x^{(1)}{}_2 \\ \vdots \\ x^{(1)}{}_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x^{(2)}{}_1 \\ x^{(2)}{}_2 \\ \vdots \\ x^{(2)}{}_n \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x^{(n)}{}_1 \\ x^{(n)}{}_2 \\ \vdots \\ x^{(n)}{}_n \end{bmatrix}$$

ベクトルの成分

大きさが１

対角化の方法

特性方程式を解いて，固有値とそれに対応する固有ベクトルを求める．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \\ \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)} \end{matrix}$$

対角化の条件と方法（その２）

固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列 $\boldsymbol{Q}$ を作る.

$$\boldsymbol{Q} = \left[\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)}\right] = \begin{bmatrix} x^{(1)}{}_1 & x^{(2)}{}_1 & \cdots & x^{(n)}{}_1 \\ x^{(1)}{}_2 & x^{(2)}{}_2 & & x^{(n)}{}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{(1)}{}_n & x^{(2)}{}_n & \cdots & x^{(n)}{}_n \end{bmatrix}$$

その逆行列 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ と $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{Q}$ の積 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ を求める.

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Q}$ が直交行列の場合

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} \left(= \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\right)$$

で対角化

対角化に関する説明（その１）（３×３正方行列の場合）

３つの列ベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(3)}$ からなる行列 $\boldsymbol{Q}$ で行列 $\boldsymbol{A}$ が以下のように対角化できたと仮定する.

$$\boldsymbol{Q}=\left[\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(3)}\right]=\begin{bmatrix} x^{(1)}{}_1 & x^{(2)}{}_1 & x^{(3)}{}_1 \\ x^{(1)}{}_2 & x^{(2)}{}_2 & x^{(3)}{}_2 \\ x^{(1)}{}_3 & x^{(2)}{}_3 & x^{(3)}{}_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

上式の左から行列 $\boldsymbol{Q}$ をかける.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

対角化に関する説明（その２）（３×３正方行列の場合）

$$A\left[\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(3)}\right] = \left[\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(3)}\right]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 x^{(1)}{}_1 & \lambda_2 x^{(2)}{}_1 & \lambda_3 x^{(3)}{}_1 \\ \lambda_1 x^{(1)}{}_2 & \lambda_2 x^{(2)}{}_2 & \lambda_3 x^{(3)}{}_2 \\ \lambda_1 x^{(1)}{}_3 & \lambda_2 x^{(2)}{}_3 & \lambda_3 x^{(3)}{}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\lambda_1 \boldsymbol{x}^{(1)}, \lambda_2 \boldsymbol{x}^{(2)}, \lambda_3 \boldsymbol{x}^{(3)}\right]$$

両辺の行列を列毎に比較すると以下の３式が得られる.

$$A\,\boldsymbol{x}^{(1)} = \lambda_1\,\boldsymbol{x}^{(1)}$$

$$A\,\boldsymbol{x}^{(2)} = \lambda_2\,\boldsymbol{x}^{(2)}$$

$$A\,\boldsymbol{x}^{(3)} = \lambda_3\,\boldsymbol{x}^{(3)}$$

固有ベクトル

固有値

総和規約

例：ベクトルやテンソルの成分，
それらの積や（偏）微分

総和規約

同じ指標が 任意の表示式内に 2 回現れたとき，その指標について自動的に 1, 2, 3 と総和されるとし，総和記号 Σ は省略される.

総和を取る場合は，表示式中に同じ指標が 3 回以上現れないように注意する.

同じ指標が 3 回以上現れる場合に総和を取る場合は，総和記号Σを省略しない.

自由指標と擬指標

自由指標：総和が取られない指標（生きた指標）.

擬指標：総和が取られる指標（死んだ指標）.

＊任意の文字で指標の置き換えが可能

適用例

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}\boldsymbol{A} = A_{ii}$$

総和規約を用いた表現（その１）

行列の積の要素

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{AB})_{ij} &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + A_{i3}B_{3j} \\
&= A_{ik}B_{kj}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}
$$

行列の積のトレース

$$
\mathrm{tr}\,\boldsymbol{AB} = \delta_{ij}A_{ik}B_{kj} = A_{ik}B_{ki}
$$

行列式

$$
\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt}
$$

総和規約を用いた表現（その２）

２つの列行列の間の線形関係

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad y_i = A_{ij} x_j$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

クロネッカーのデルタと置換記号の関係

$$e_{ijp} e_{ijq} = 2\delta_{pq}$$

$$e_{ijp} e_{rsp} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}$$

直交行列

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad Q_{ik} Q_{jk} = \delta_{ij} \qquad Q_{ki} Q_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$$

総和規約を用いた表現（その３）

ベクトルの大きさの２乗

$$x_i x_i = x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 \left(= x^2\right)$$

$$\cancel{x_i^{\,2} \neq x_i x_i}$$

左辺には i が一度しか出てこないため，総和規約が適用されない.

偏微分

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1, \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial x_1}{\partial x_3} = 0, \cdots$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii} = 3$$

i と j を等しくすると総和規約が適用される.

総和規約を用いた表現（その４）

行列の対角成分の和の２乗

$$\left(A_{ii}\right)^2 = \left(A_{11} + A_{22} + A_{33}\right)^2$$

$$\cancel{\parallel}$$

括弧の有無によって結果が変わる.

行列の対角成分の２乗の和

$$A_{ii}{}^2 = A_{11}{}^2 + A_{22}{}^2 + A_{33}{}^2$$

総和規約を用いた表現（その５）

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ベクトルの大きさの２乗の積

$$x_i x_i x_j x_j$$

方法１

総和規約を各添字（iあるいはj）に対して個別に適用してから式を展開した場合

$$= (x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3)(x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3)$$
$$= (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)^2$$

方法２

総和規約が適用されるすべての量に一度に規約を適用して式を展開した場合

$$\begin{aligned} &= x_1x_1x_1x_1 + x_1x_1x_2x_2 + x_1x_1x_3x_3 \\ &\quad + x_2x_2x_1x_1 + x_2x_2x_2x_2 + x_2x_2x_3x_3 \\ &\quad + x_3x_3x_1x_1 + x_3x_3x_2x_2 + x_3x_3x_3x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x_1{}^4 + x_2{}^4 + x_3{}^4 \\ &\quad + 2x_1{}^2x_2{}^2 + 2x_2{}^2x_3{}^2 + 2x_3{}^2x_1{}^2 \end{aligned}$$

総和規約を用いた表現（その６）

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

行列のトレースの積

$$A_{ii}A_{jj}$$

方法１

総和規約を各添字（iあるいはj）に対して個別に適用してから式を展開した場合

$$= (A_{11} + A_{22} + A_{33})(A_{11} + A_{22} + A_{33})$$

方法２

総和規約が適用されるすべての量に一度に規約を適用して式を展開した場合

$$\begin{aligned} &= A_{11}A_{11} + A_{11}A_{22} + A_{11}A_{33} \\ &\quad + A_{22}A_{11} + A_{22}A_{22} + A_{22}A_{33} \\ &\quad + A_{33}A_{11} + A_{33}A_{22} + A_{33}A_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A_{11}{}^{2} + A_{22}{}^{2} + A_{33}{}^{2} \\ &\quad + 2A_{11}A_{22} + 2A_{22}A_{33} + 2A_{33}A_{11} \end{aligned}$$

ケーリー・ハミルトンの定理

行列 $\boldsymbol{A}$ のべき乗は，I_1, I_2, I_3で表される量を係数とした $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I}$, の線形結合によって表すことができる.

3×3正方行列 $\boldsymbol{A}$ ([$= A_{ij}$]) について以下の恒等式が成り立つ.

$$\boldsymbol{A}^3 = I_1\boldsymbol{A}^2 - I_2\boldsymbol{A} + I_3\boldsymbol{I}$$

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$$

$$= A_{ii}\left(= A_{11} + A_{22} + A_{33}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left\{\left(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}\right)^2 - \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^2\right)\right\}$$

$$= A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}$$

$$\left(= A_{11}A_{22} + A_{22}A_{33} + A_{33}A_{11} - A_{12}A_{21} - A_{23}A_{32} - A_{31}A_{13}\right)$$

$$I_3 = \det\boldsymbol{A}\left(= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{6}e_{ijk}e_{rst}A_{ir}A_{js}A_{kt}$$