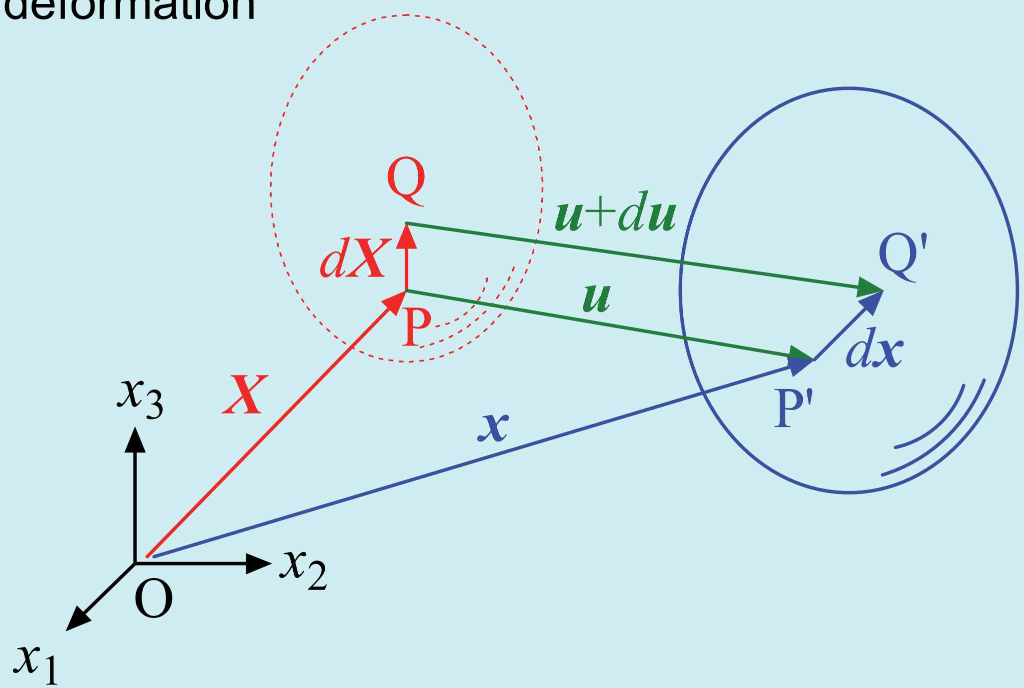
ひずみと回転

strain tensor

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

deformation



rotation tensor

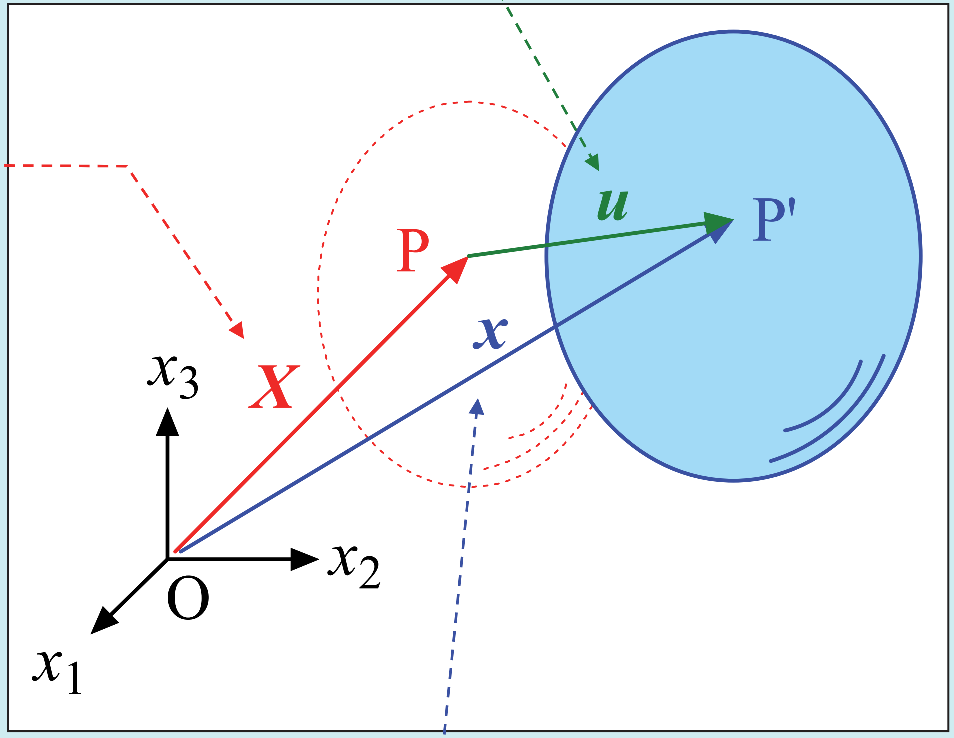
$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

座標と変位ベクトル

$\boldsymbol{X}, X_i$ ：物質座標
（ラグランジュ座標）

物体点固有の座標であり，時間が経過しても常に同じ値を保つ.

$\boldsymbol{u}, u_i$ ：変位ベクトル



変位ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \boxed{\boldsymbol{x}} - \boxed{\boldsymbol{X}}, u_i = x_i - X_i$$

$\boldsymbol{x}, x_i$ ：空間座標
（オイラー座標）

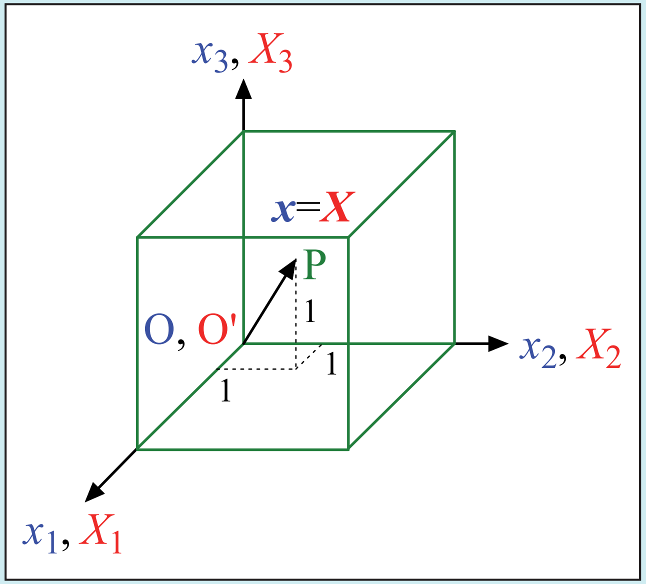
物体点が空間内に占める位置であり，物体点の運動に伴って変化する.

連続体の運動

運動によって連続体が分離したり重なり合ったりしない. ＝ x_iとX_iが１対１に対応.

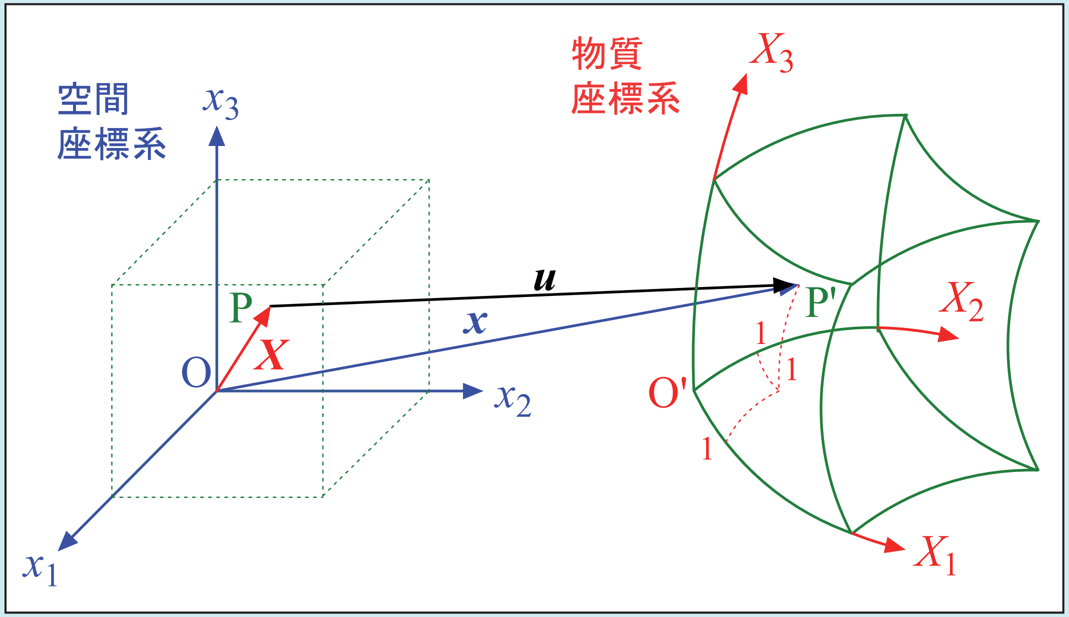
$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$

運動前



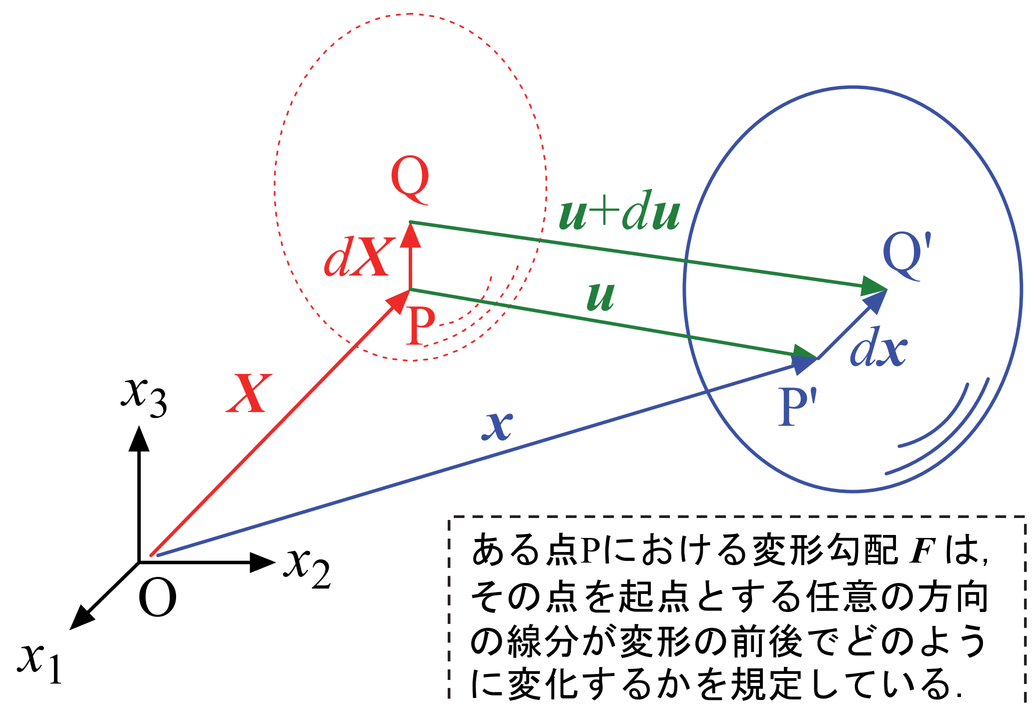
$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}$

運動後



変形勾配テンソル

$d\boldsymbol{X}$ から $d\boldsymbol{x}$ への線形変換を規定する２階のテンソル



ある点Pにおける変形勾配 $\boldsymbol{F}$ は，その点を起点とする任意の方向の線分が変形の前後でどのように変化するかを規定している．

$$d\boldsymbol{x} = \boxed{\boldsymbol{F}} \cdot d\boldsymbol{X},$$

$$dx_i = \boxed{F_{ij}} dX_j$$

変形勾配テンソル

$d\boldsymbol{x}$ と $d\boldsymbol{X}$ はベクトル（１階のテンソル）

テンソルの商法則

$\boldsymbol{F}$ は２階のテンソル

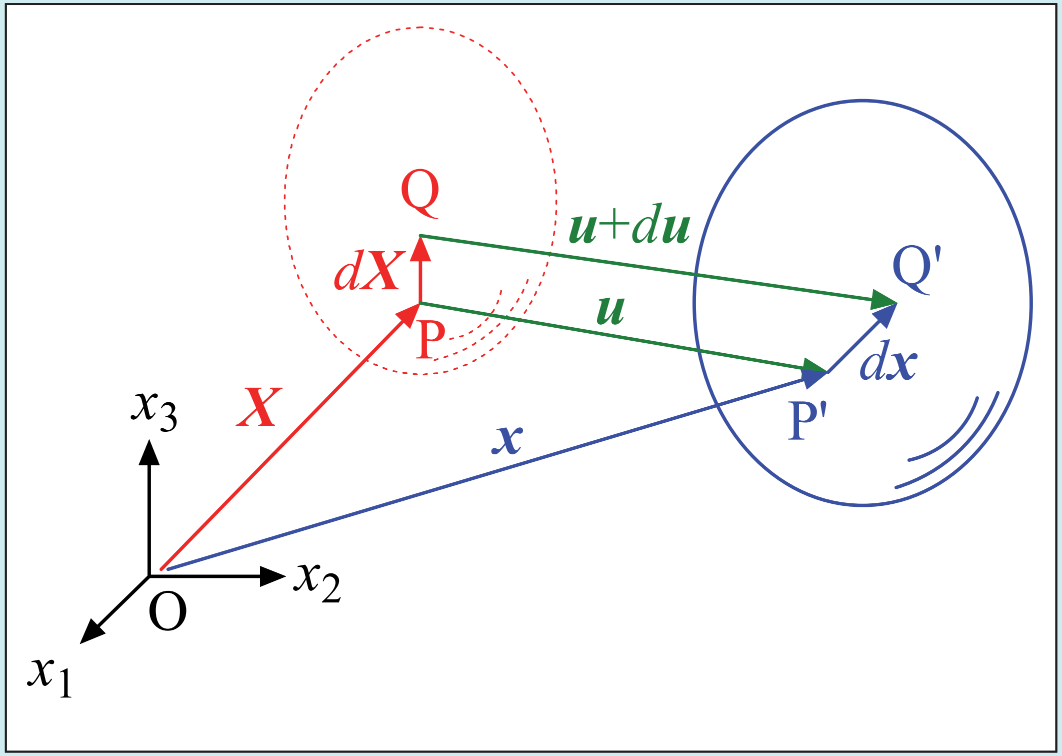
$$\boxed{F_{ij}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

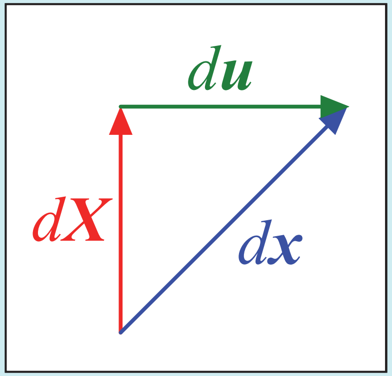
変位勾配テンソル

$$d\boldsymbol{u} = \boxed{\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}} \cdot d\boldsymbol{X},$$
$$du_i = \boxed{\nabla_j u_i} dX_j$$

$\boldsymbol{u} \otimes \nabla$

変位勾配テンソル





$$\boxed{\nabla_j u_i} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

変形勾配テンソルと変位勾配テンソルの関係

変形勾配テンソル

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i + u_i)$$

$$= \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

$$= \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \boxed{\nabla_j u_i}$$

$$\boldsymbol{u} \otimes \nabla$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boxed{\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}}$$

変位勾配テンソル

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

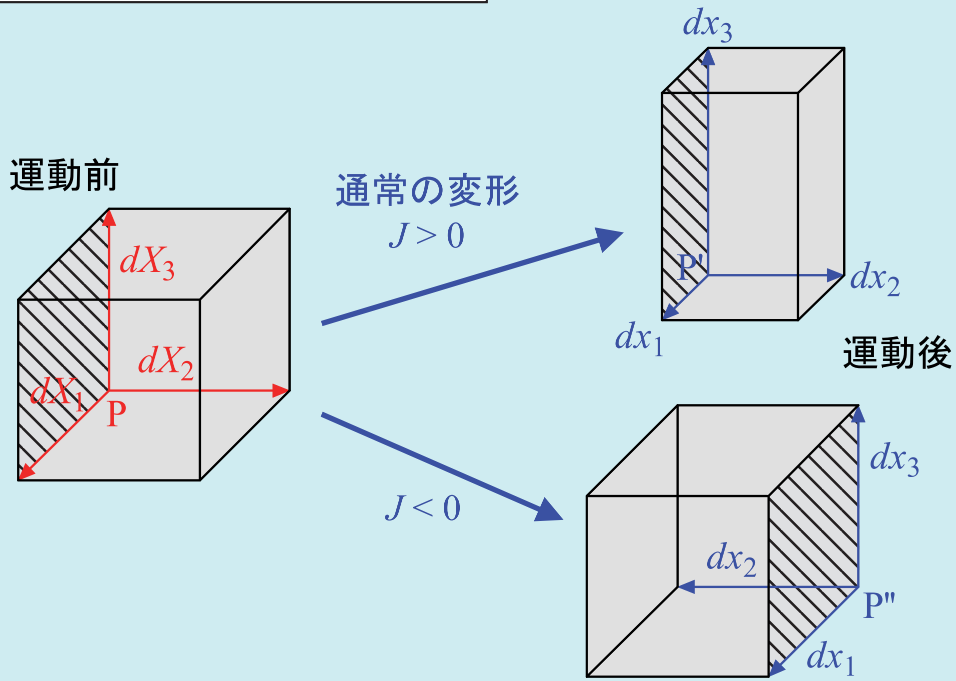
ヤコビアン（ヤコビの行列式）

ヤコビアン

$$J = \det \boldsymbol{F} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}$ の行列式

連続体の運動が存在するための必要十分条件 ＝ $J \neq 0$



ヤコビアン J は，変形前の微小領域の体積 $dX_1\, dX_2\, dX_3$ と変形後の微小領域の体積 $dx_1\, dx_2\, dx_3$ の比率を表す．

$$dx_1 dx_2 dx_3 = |J|\, dX_1 dX_2 dX_3$$

右手系であった座標系が運動後には左手系になる．すなわち，物質が運動中に裏返っている．

グリーンのひずみテンソル

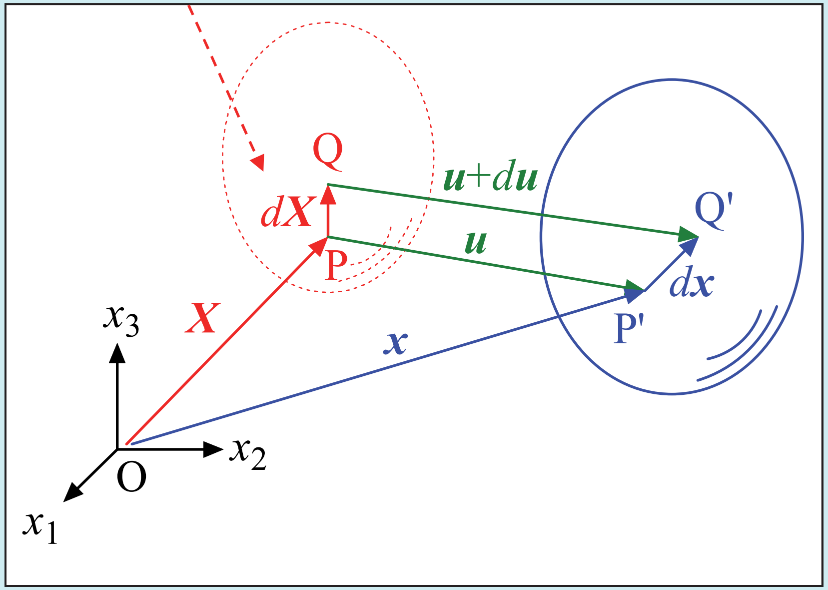
微小な線要素の長さの２乗の変化を変形前の線要素の状態と対応づけたときの係数

指標表現

$$ds^2 - dS^2 = 2\boxed{E_{ij}}\boxed{dX_i dX_j}$$

シンボリック表現

$$ds^2 - dS^2 = 2\boldsymbol{E} : (d\boldsymbol{X} \otimes d\boldsymbol{X})$$
$$= 2d\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{X}$$



ラグランジュのひずみテンソルとも言う．

$$ds = |d\boldsymbol{x}|, ds^2 = dx_i dx_i$$
$$dS = |d\boldsymbol{X}|, dS^2 = dX_i dX_i$$

アルマンシのひずみテンソル

微小な線要素の長さの２乗の変化を変形後の線要素の状態と対応づけたときの係数

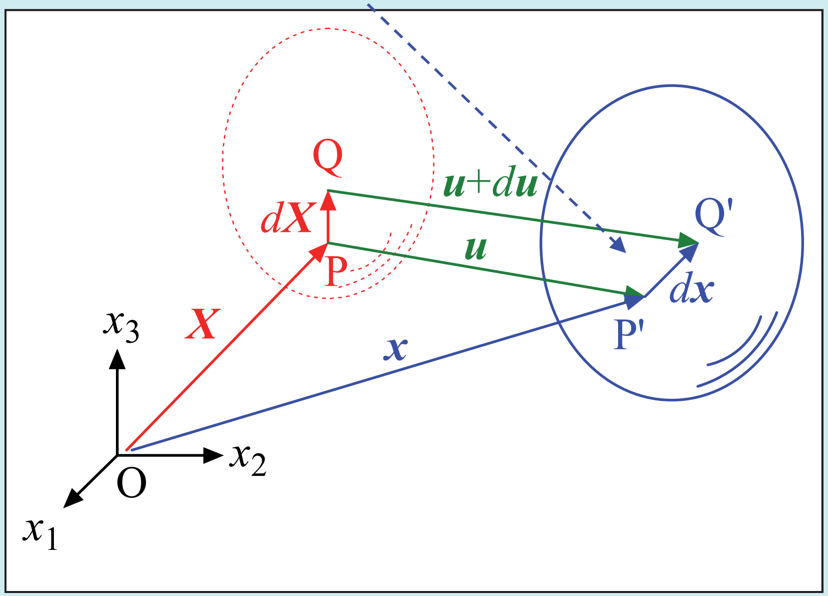
指標表現

$$ds^2 - dS^2 = 2\boxed{e_{ij}}\boxed{dx_i dx_j}$$

シンボリック表現

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= 2\boldsymbol{e} : (d\boldsymbol{x} \otimes d\boldsymbol{x}) \\ &= 2d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

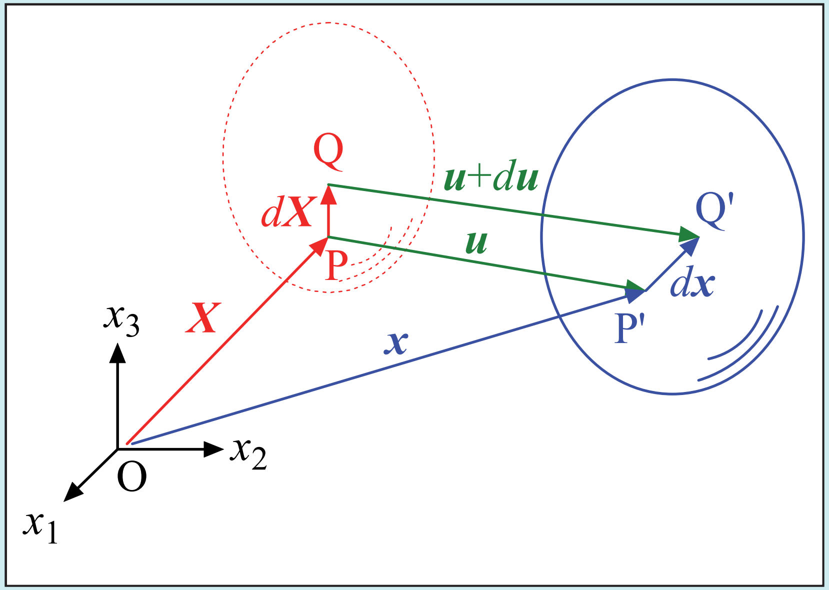
オイラーのひずみテンソルとも言う.



$$ds = |d\boldsymbol{x}|, ds^2 = dx_i dx_i$$

$$dS = |d\boldsymbol{X}|, dS^2 = dX_i dX_i$$

変位で表したひずみテンソル



グリーンのひずみテンソル（変形前の状態が基準）

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right)$$

総和規約を適用

２階の対称テンソル

アルマンシのひずみテンソル（変形後の状態が基準）

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right)$$

総和規約を適用

グリーンのひずみテンソルの展開表現

グリーンのひずみテンソル（変形前の状態が基準）

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right)$$

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \right\}$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right\}$$

$$E_{22} = \cdots$$

$$E_{33} = \cdots$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \right\} = E_{21}$$

$$E_{23} = \cdots = E_{32}$$

$$E_{31} = \cdots = E_{13}$$

変位で表したグリーンのひずみテンソルの導出（その１）

グリーンのひずみテンソルの定義

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{ij}dX_idX_j$$

変位で表したグリーンのひずみテンソル

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)$$

導出過程

$$dx_m dx_m = \boxed{\delta_{mn} dx_m dx_n} = \delta_{mn}\left(\frac{\partial x_m}{\partial X_i}dX_i\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial X_j}dX_j\right)$$

$$= \delta_{mn}\frac{\partial x_m}{\partial X_i}\frac{\partial x_n}{\partial X_j}dX_idX_j = \boxed{\frac{\partial x_m}{\partial X_i}\frac{\partial x_m}{\partial X_j}dX_idX_j}$$

空間座標の微分dxを物質座標の微分dXで表す.

次の式変形で，同じ指標が２回以上出ないように，この段階でクロネッカーデルタを用いて，２つあるdx_mのうち一方のdx_mの指標を変えておくとわかりやすい.

$$ds^2 - dS^2 = dx_m dx_m - dX_i dX_i$$

$$= \boxed{\delta_{mn} dx_m dx_n} - \delta_{ij}dX_idX_j$$

$$= \frac{\partial x_m}{\partial X_i}\frac{\partial x_m}{\partial X_j}dX_idX_j - \delta_{ij}dX_idX_j$$

$$= \left(\frac{\partial x_m}{\partial X_i}\frac{\partial x_m}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right)dX_idX_j$$

変位で表したグリーンのひずみテンソルの導出（その２）

$$
\begin{aligned}
ds^2 - dS^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial X_i}(X_m + u_m)\frac{\partial}{\partial X_j}(X_m + u_m) - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j \\
&= \left\{ \left(\boxed{\frac{\partial X_m}{\partial X_i}} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \right)\left(\frac{\partial X_m}{\partial X_j} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) - \delta_{ij} \right\} dX_i dX_j \\
&= \left\{ \left(\boxed{\delta_{mi}} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \right)\left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) - \delta_{ij} \right\} dX_i dX_j \\
&= \left(\delta_{mi}\delta_{mj} + \delta_{mi}\frac{\partial u_m}{\partial X_j} + \delta_{mj}\frac{\partial u_m}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j \\
&= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) dX_i dX_j = 2E_{ij} dX_i dX_j
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial X_m}{\partial X_i} = \delta_{mi}
$$

$$
\left(\frac{\partial X_1}{\partial X_1} = 1, \frac{\partial X_1}{\partial X_2} = 0, \cdots \right)
$$

アルマンシのひずみテンソルに関してもほぼ同様の手順で導出できる.

微小ひずみテンソル

微小ひずみテンソル

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} = e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

変形が微小な場合，次の２式が成立

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \qquad \boxed{\frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j} \approx 0}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\
\varepsilon_{31} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)
\end{aligned}\right.$$

ひずみテンソルと回転テンソル

変位勾配テンソル

$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u} = \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boxed{\boldsymbol{\omega}},\ \nabla_j u_i = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \otimes \nabla$$

$$\cong \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

対称テンソル

逆対称テンソル

$\boldsymbol{u} \otimes \nabla$ の
転置テンソル

ひずみテンソル

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u} \otimes \nabla + \boxed{\nabla \otimes \boldsymbol{u}}\right),$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j\right)$$

回転テンソル

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u} \otimes \nabla - \boxed{\nabla \otimes \boldsymbol{u}}\right),$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i - \nabla_i u_j\right)$$

$\boldsymbol{u} \otimes \nabla$ の
転置テンソル

ひずみテンソルの成分（成分表示）

ひずみテンソルは対称テンソルで独立成分は６個

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\varepsilon_{11}} & \boxed{\varepsilon_{12}} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \boxed{\varepsilon_{22}} & \boxed{\varepsilon_{23}} \\ \boxed{\varepsilon_{31}} & \varepsilon_{23} & \boxed{\varepsilon_{33}} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \end{aligned}}
$$

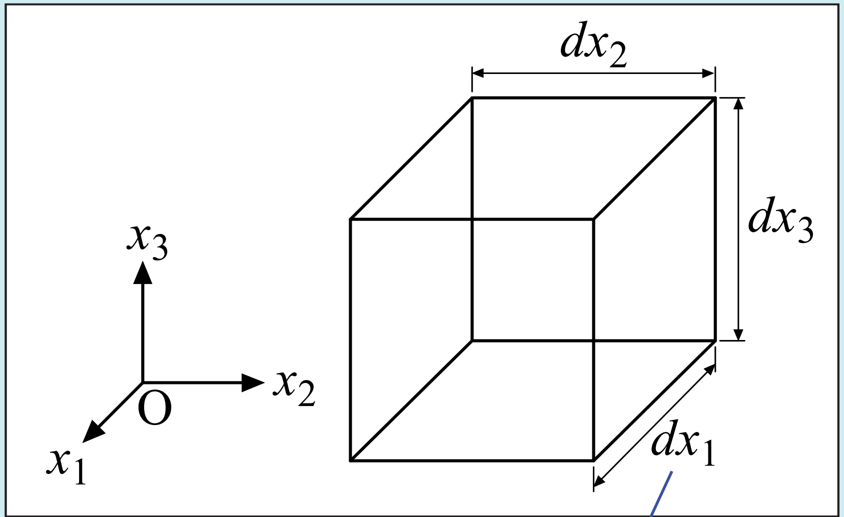
物体の変形を表すテンソル

ひずみテンソルの成分（ε_{11}成分）

両面の相対的な変位

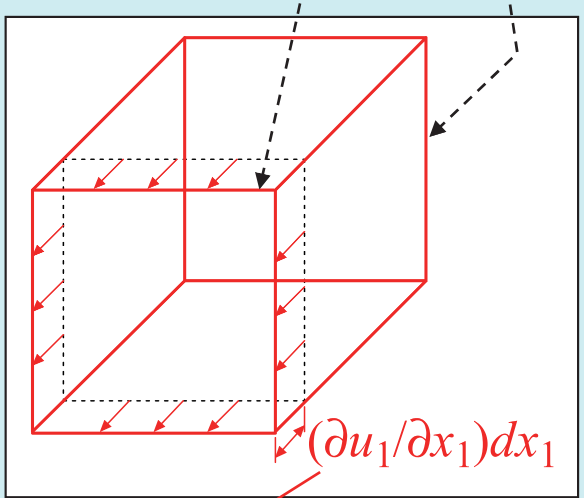
$$= u_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 - u_1$$

変形前



変形

変形後



伸び

ひずみ

$$\varepsilon_{11} = \frac{\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

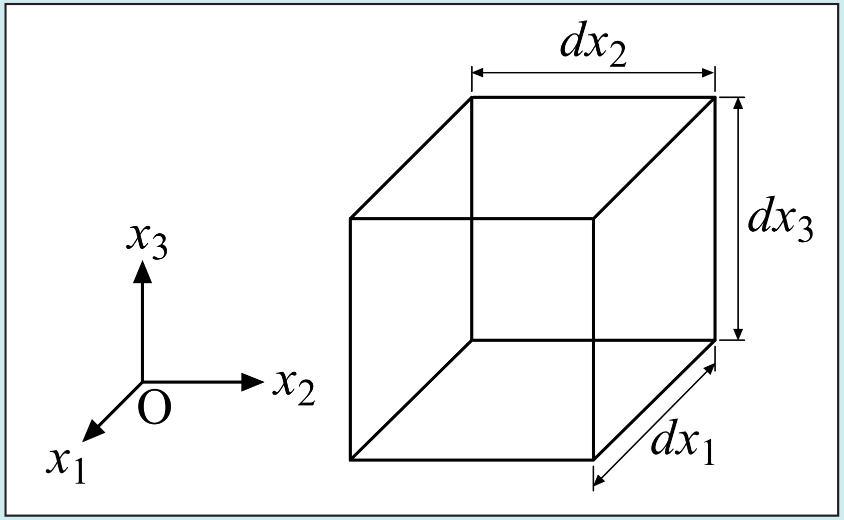
変形前の長さ

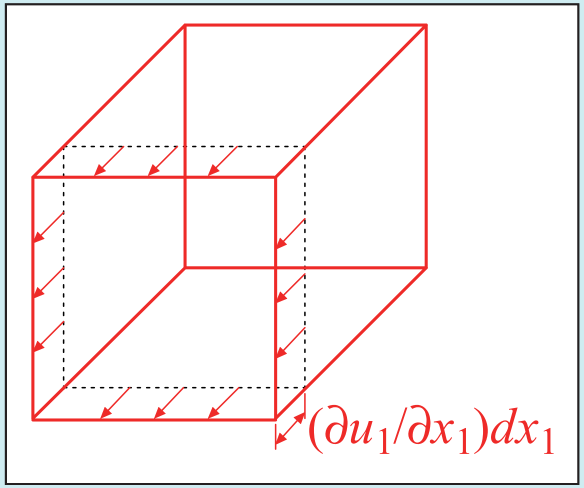
単位長さ当たりの伸び

ひずみテンソルの成分（対角成分）

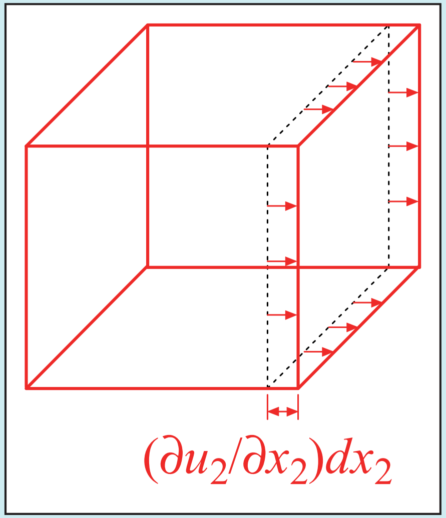
（体積変化あり）

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boxed{\varepsilon_{11}} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \boxed{\varepsilon_{22}} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \boxed{\varepsilon_{33}} \end{bmatrix}$$



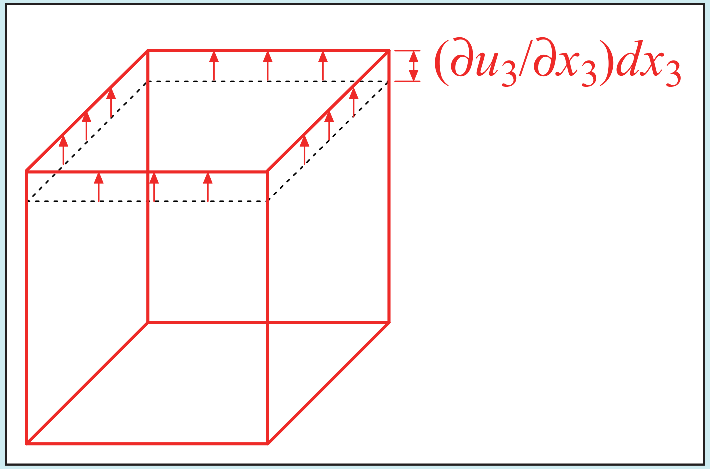


ひずみ $\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$



ひずみ $\varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}$

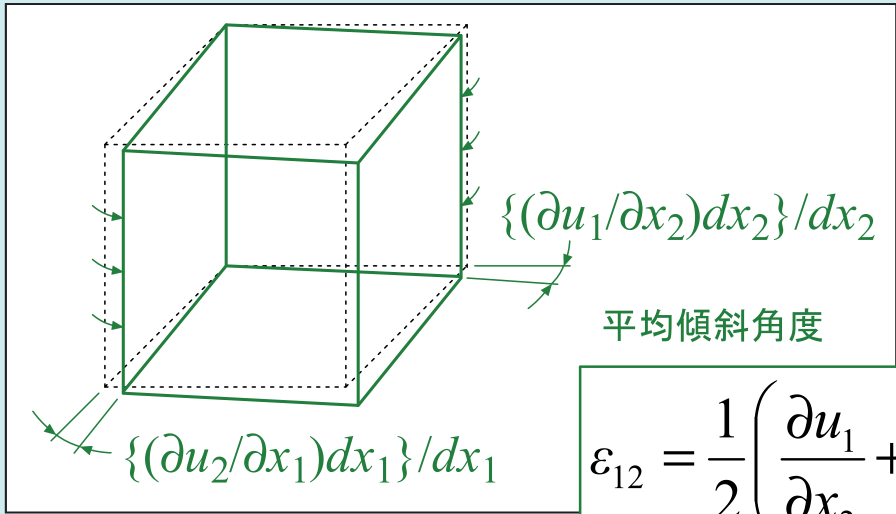
ひずみ $\varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$



ひずみテンソルの成分
（非対角成分）

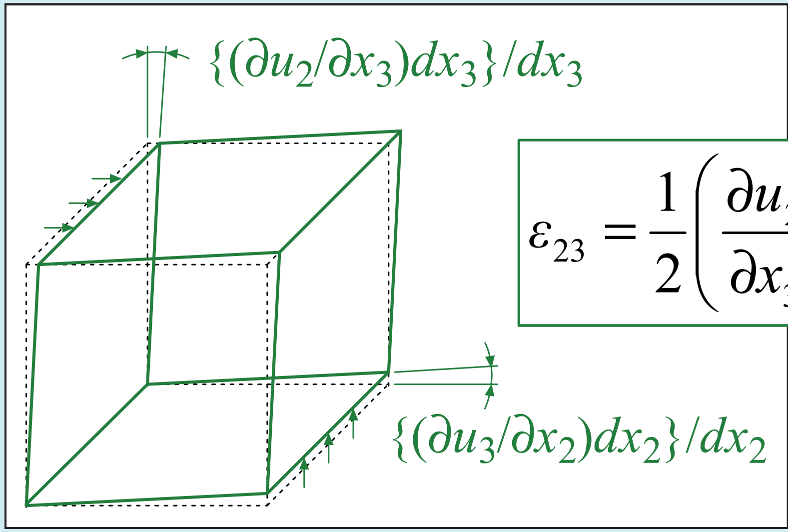
（体積変化なし）

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \boxed{\varepsilon_{12}} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \boxed{\varepsilon_{23}} \\ \boxed{\varepsilon_{31}} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$



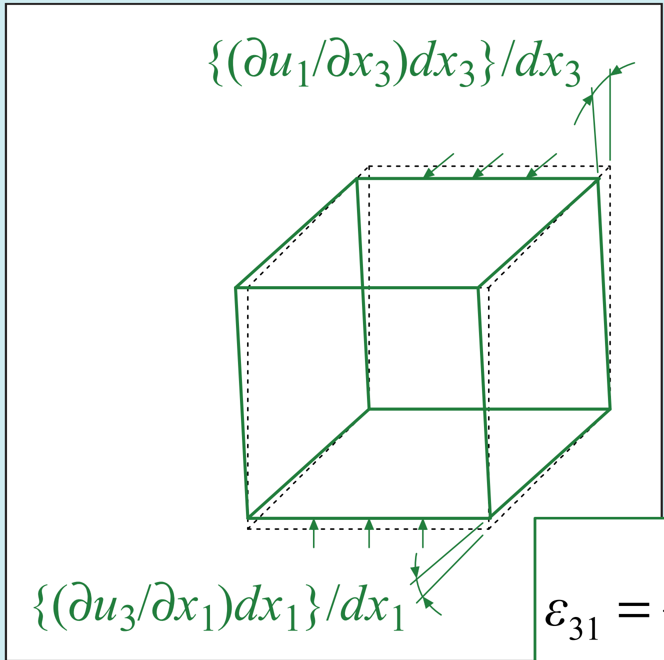
平均傾斜角度

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$



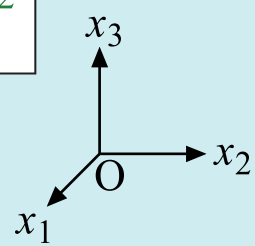
平均傾
斜角度

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$$



$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$

平均傾
斜角度



回転テンソル

回転テンソルは逆対称テンソルで独立成分は３個

回転ベクトル

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{21} & \boxed{\omega_{13}} \\ \boxed{\omega_{21}} & 0 & -\omega_{32} \\ -\omega_{13} & \boxed{\omega_{32}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{ij} = -e_{ijk}\boxed{\omega_k}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_{32} \\ \omega_{13} \\ \omega_{21} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \end{aligned}}$$

物体の剛体回転を表すテンソル

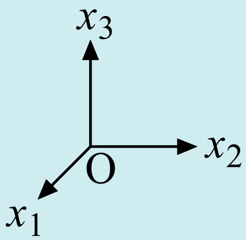
（体積変化なし）

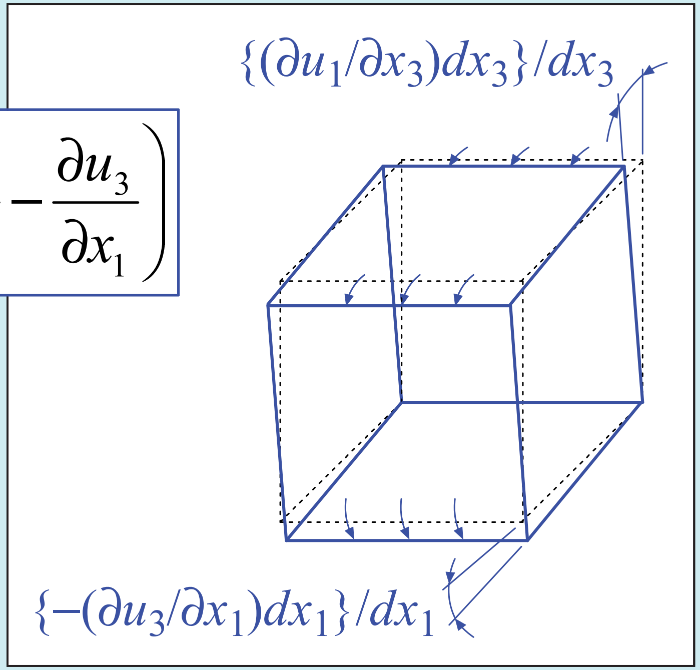
回転テンソルの成分

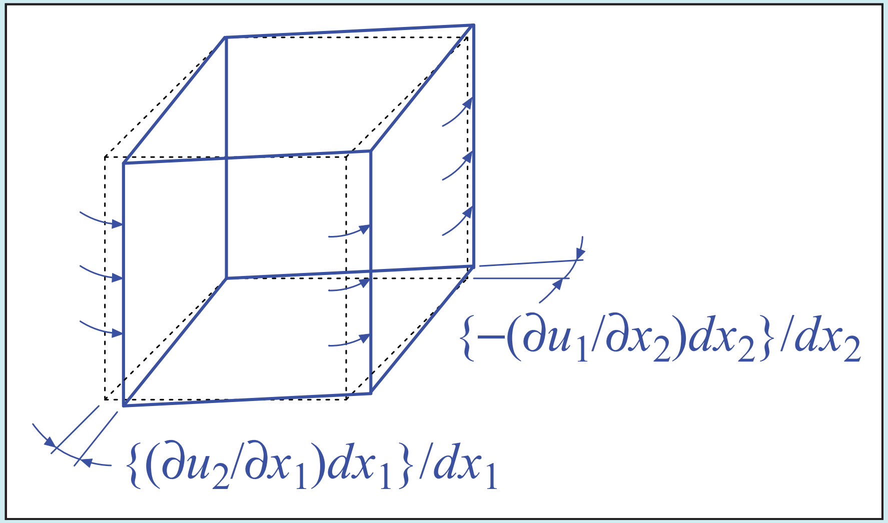
$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{21} & \boxed{\omega_{13}} \\ \boxed{\omega_{21}} & 0 & -\omega_{32} \\ -\omega_{13} & \boxed{\omega_{32}} & 0 \end{bmatrix}$$

平均回転角度

$$\omega_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

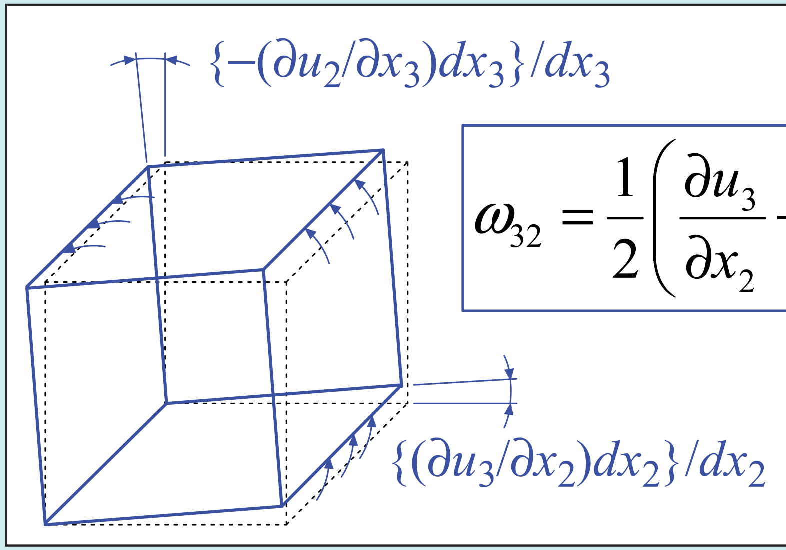






平均回転角度

$$\omega_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$



平均回転角度

$$\omega_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

任意の方向のひずみ（垂直ひずみ）

垂直ひずみ

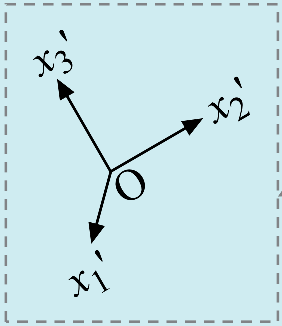
$$\varepsilon_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{ds - dS}{dS}$$

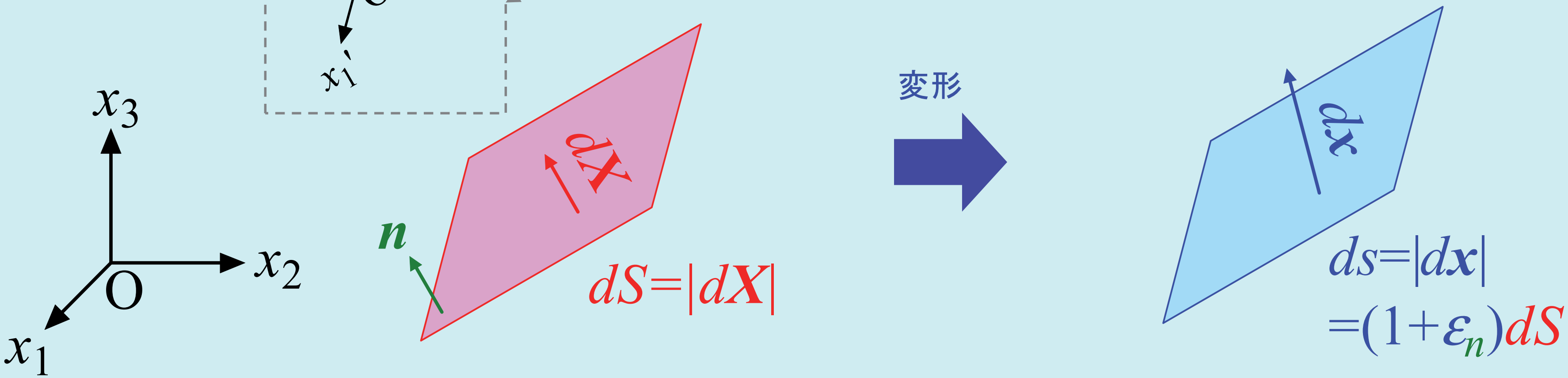
$\boldsymbol{n}$（単位法線ベクトル）に平行な方向の線分の単位長さ当たりの伸び

例

$$\boxed{\varepsilon_{11} = \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}_1}$$

基本ベクトルの1つ（例えば，x_3）を$\boldsymbol{n}$に平行な方向に取り，ひずみテンソル全体をその座標系へ変換したときのε_{33}成分がε_nと考えても良い．





任意の方向のひずみ（せん断ひずみ）

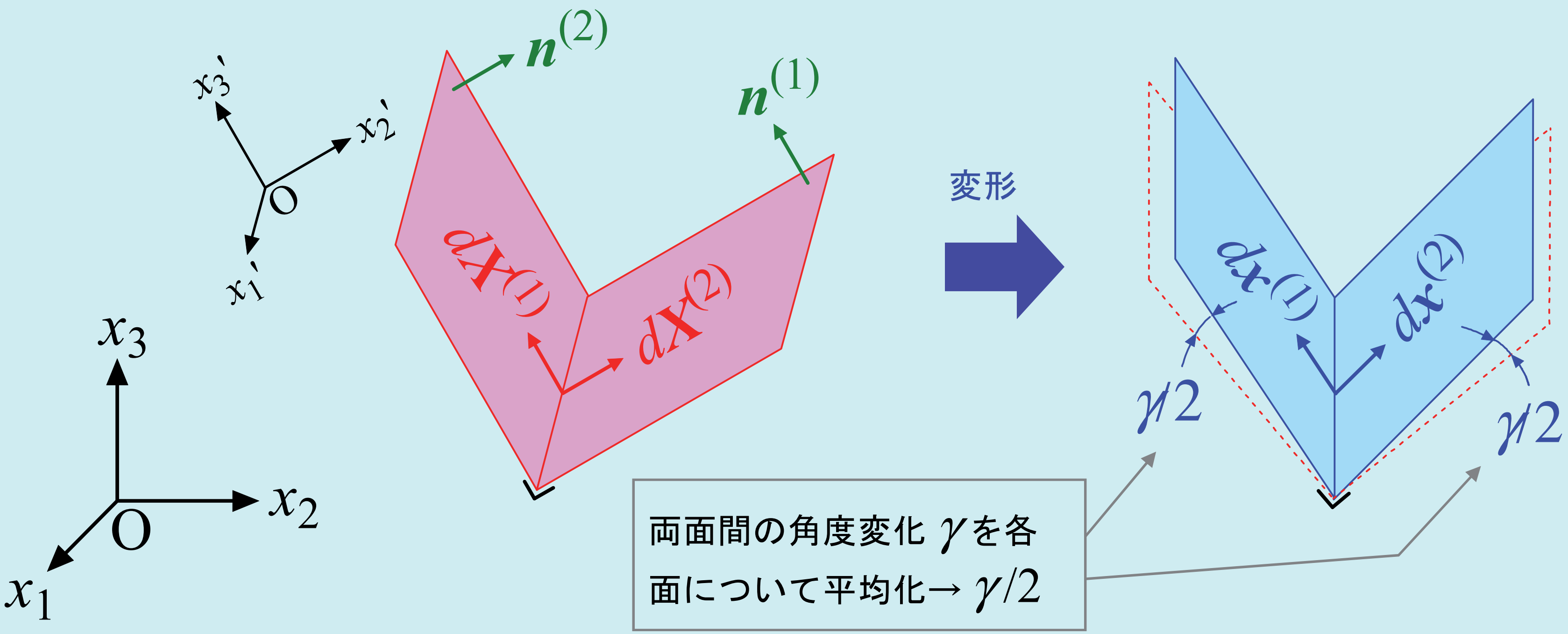
せん断ひずみ

$$\varepsilon_s = \boldsymbol{n}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{n}^{(2)} = \frac{\gamma}{2}$$

互いに直交する単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}^{(1)}$と $\boldsymbol{n}^{(2)}$ のそれぞれに平行なベクトル $d\boldsymbol{X}^{(1)}$ と $d\boldsymbol{X}^{(2)}$ の平均的な角度変化

例

$$\boxed{\varepsilon_{12} = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_2}$$



両面間の角度変化 γを各面について平均化→ $\gamma/2$

ひずみテンソルの例（単軸引張り）

変位

$$u_1 = x_1 - X_1 = X_1(1+\varepsilon) - X_1 = \varepsilon X_1$$

$$u_2 = x_2 - X_2 = 0$$

$$u_3 = x_3 - X_3 = 0$$

単軸引張りのひずみテンソル

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

変位勾配テンソル

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \otimes \nabla = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

対称

逆対称

回転テンソル

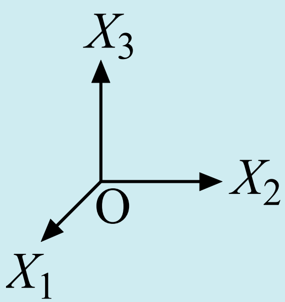
$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

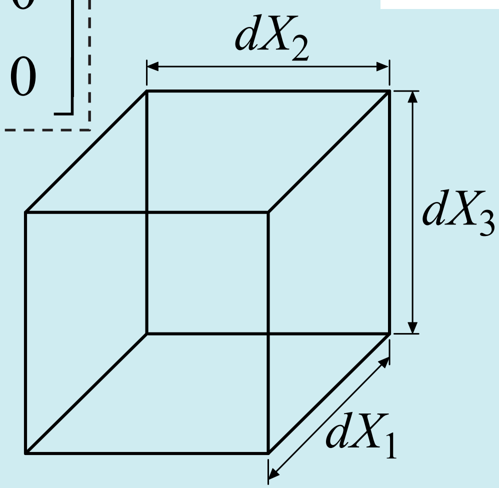
$$x_1 = X_1(1+\varepsilon)$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3$$

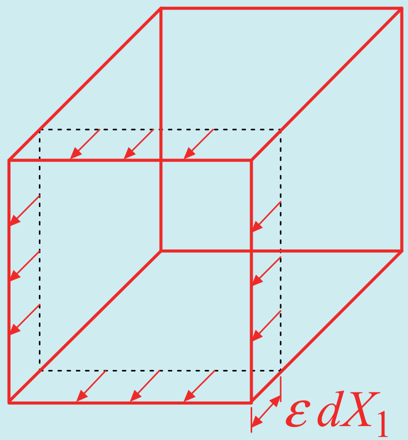
$\varepsilon > 0$





(X_1, X_2, X_3)の位置にある微小６面体

変形



物体は変形しているだけで回転していない.

ひずみテンソルの例（純せん断）

変位

$$u_1 = x_1 - X_1 = (\gamma/2)X_2$$
$$u_2 = x_2 - X_2 = (\gamma/2)X_1$$
$$u_3 = x_3 - X_3 = 0$$

純せん断のひずみテンソル

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

対称

変位勾配テンソル

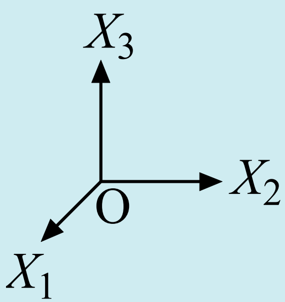
$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \otimes \nabla$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

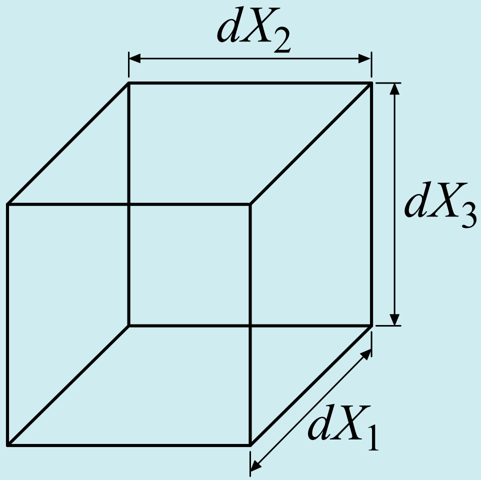
$$x_1 = X_1 + X_2(\gamma/2)$$
$$x_2 = X_1(\gamma/2) + X_2$$
$$x_3 = X_3$$

逆対称

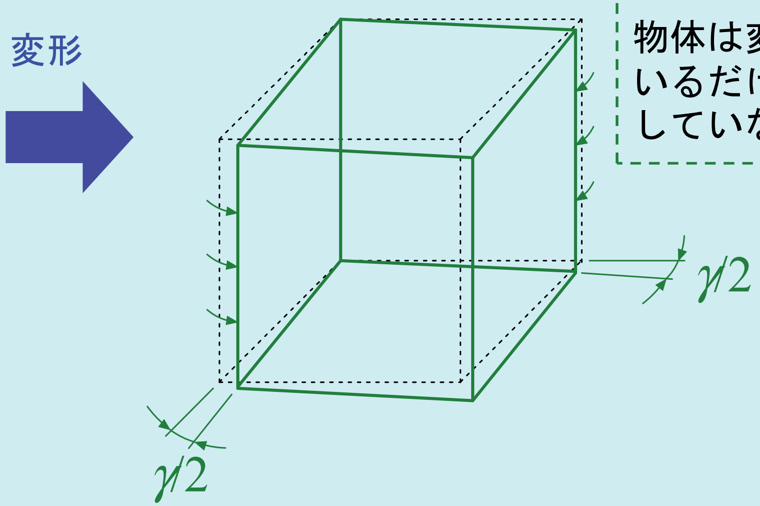
回転テンソル

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





(X_1, X_2, X_3)の位置にある微小６面体



物体は変形しているだけで回転していない.

回転テンソルの例（x_3軸回りの回転）

変位

$$u_1 = x_1 - X_1 = -(\gamma/2)X_2$$
$$u_2 = x_2 - X_2 = (\gamma/2)X_1$$
$$u_3 = x_3 - X_3 = 0$$

ひずみテンソル

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

対称

変位勾配テンソル

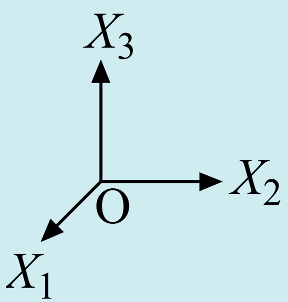
$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \otimes \nabla = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

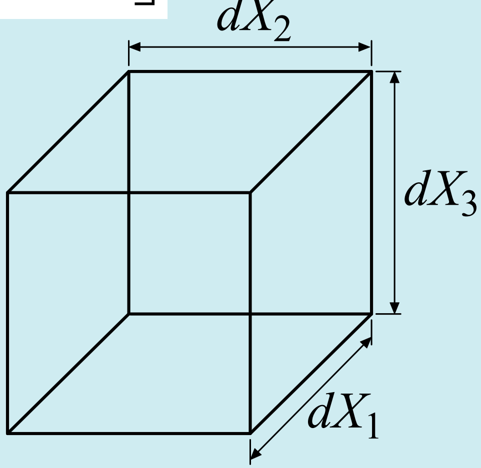
逆対称

回転テンソル

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

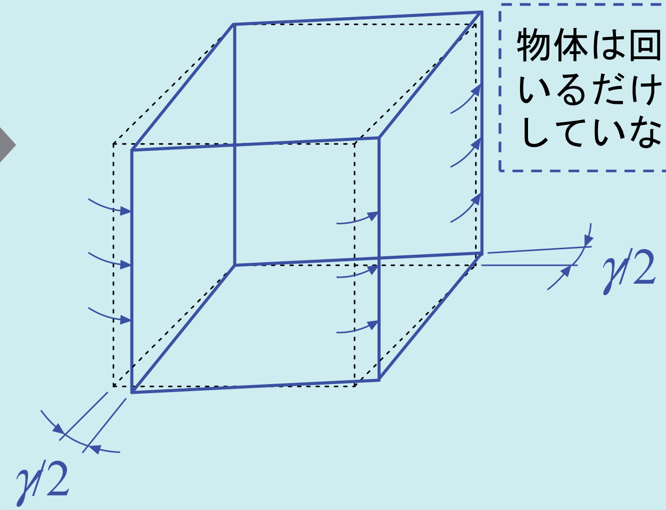
$$x_1 = X_1 - X_2(\gamma/2)$$
$$x_2 = X_1(\gamma/2) + X_2$$
$$x_3 = X_3$$





(X_1, X_2, X_3)の位置にある微小６面体

回転



物体は回転しているだけで変形していない.

主ひずみと主軸（その１）

以後に出てくる偏差成分と混同しないように，ここでは，座標変換後のテンソルや主軸を*付きで表している．

ひずみテンソルの固有値 ＝ 主ひずみ

固有ベクトル ＝ 主軸

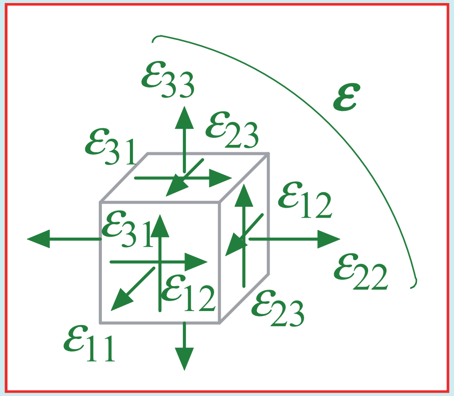
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

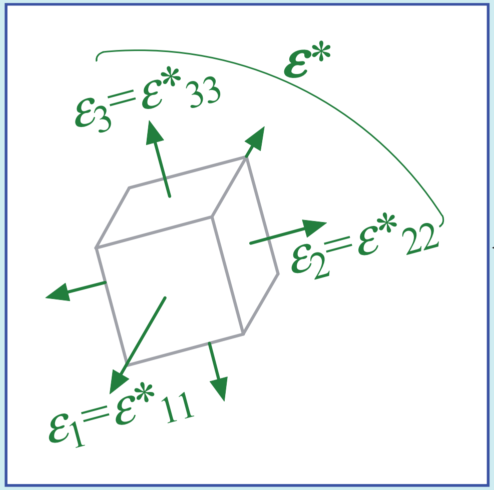
座標変換

$$\varepsilon_{ij}^{\ *} = Q_{ik} Q_{jl} \varepsilon_{kl}$$

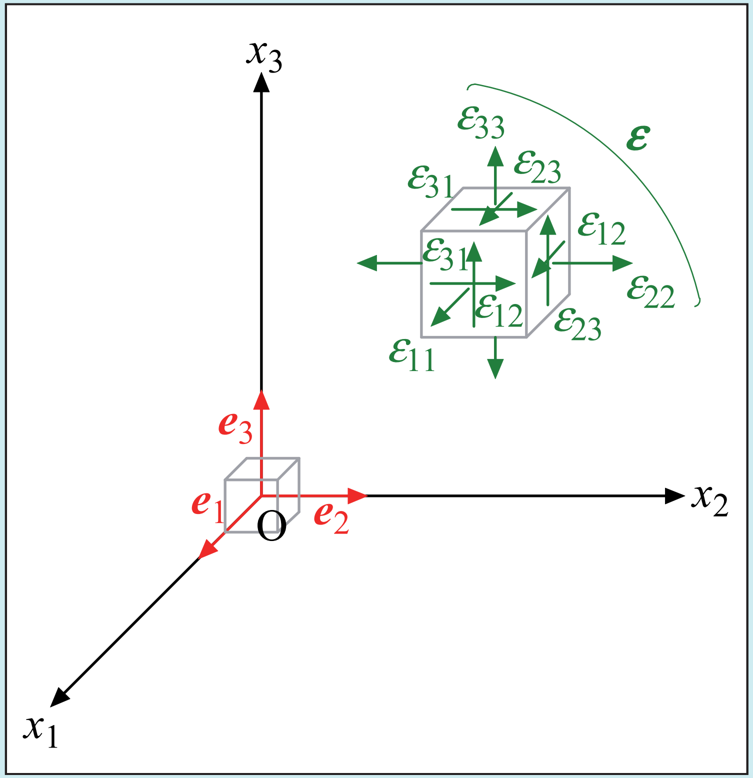
せん断ひずみ成分は０

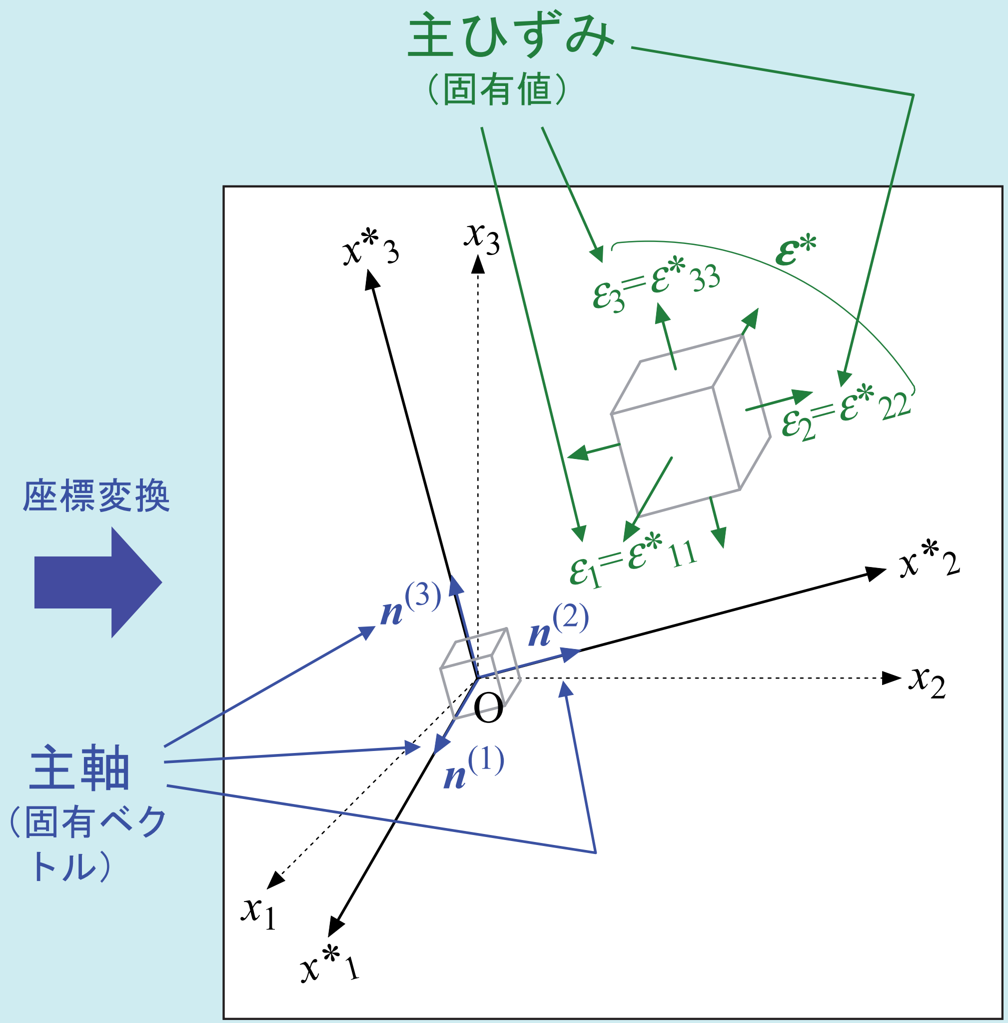
$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$





主ひずみと主軸（その２）





主ひずみ$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$（スカラー）

ひずみテンソル

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{n}^{(i)} = \varepsilon\, \boldsymbol{n}^{(i)}$$

主軸

体積ひずみ

指標表現

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

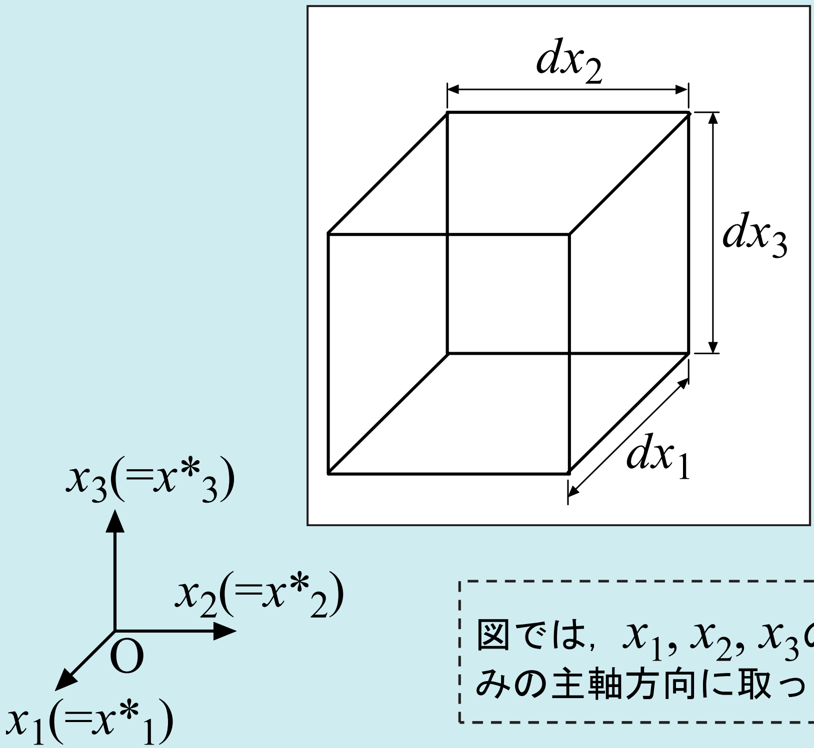
シンボリック表現

$$\varepsilon_v = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$$

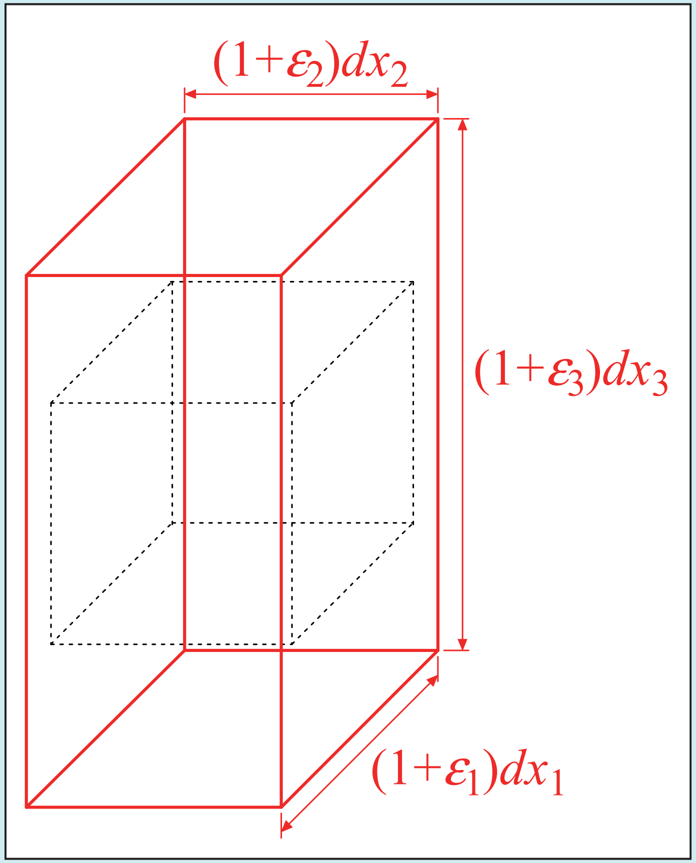
展開表現

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

物質の単位体積当たりの体積変化（膨張）を表す．



変形



図では，x_1, x_2, x_3の各軸をひずみの主軸方向に取っている．

平均垂直ひずみ

指標表現

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$$

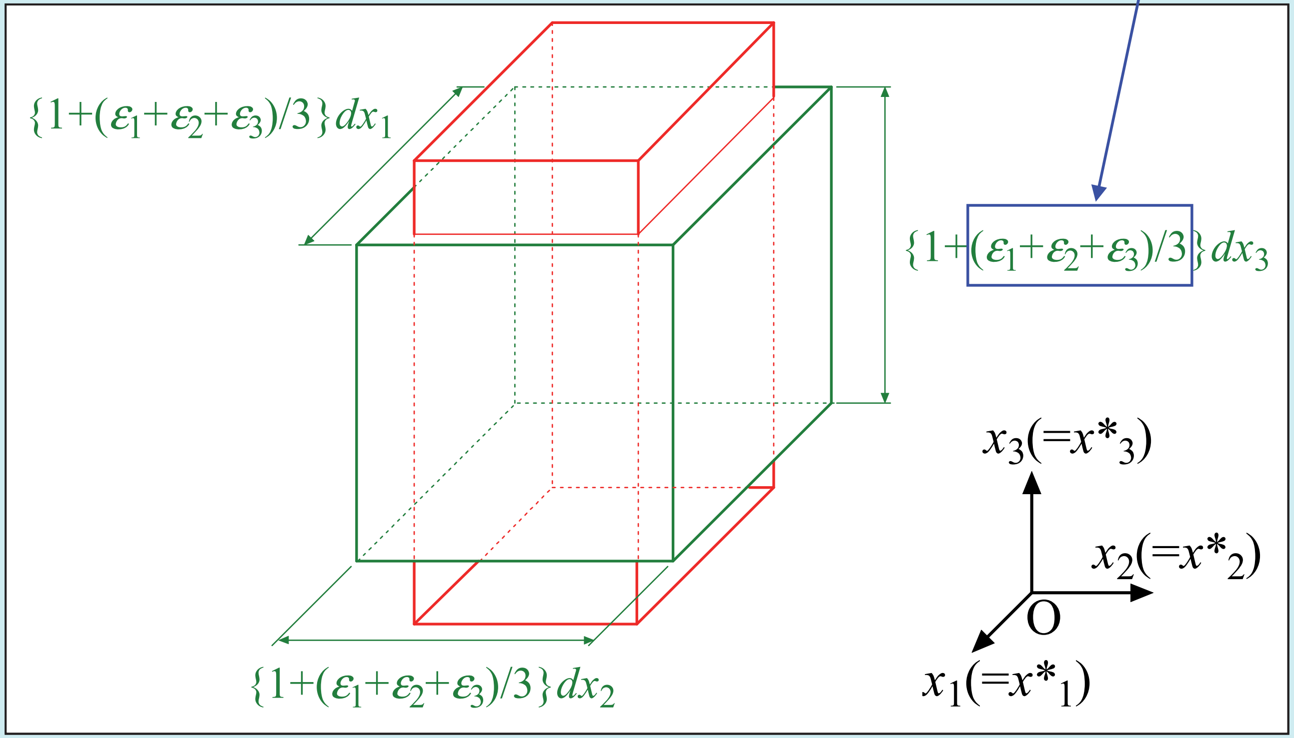
シンボリック表現

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

展開表現

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)$$

平均垂直ひずみ



図では，x_1, x_2, x_3 の各軸をひずみの主軸方向に取っている．

偏差ひずみテンソル

指標表現

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

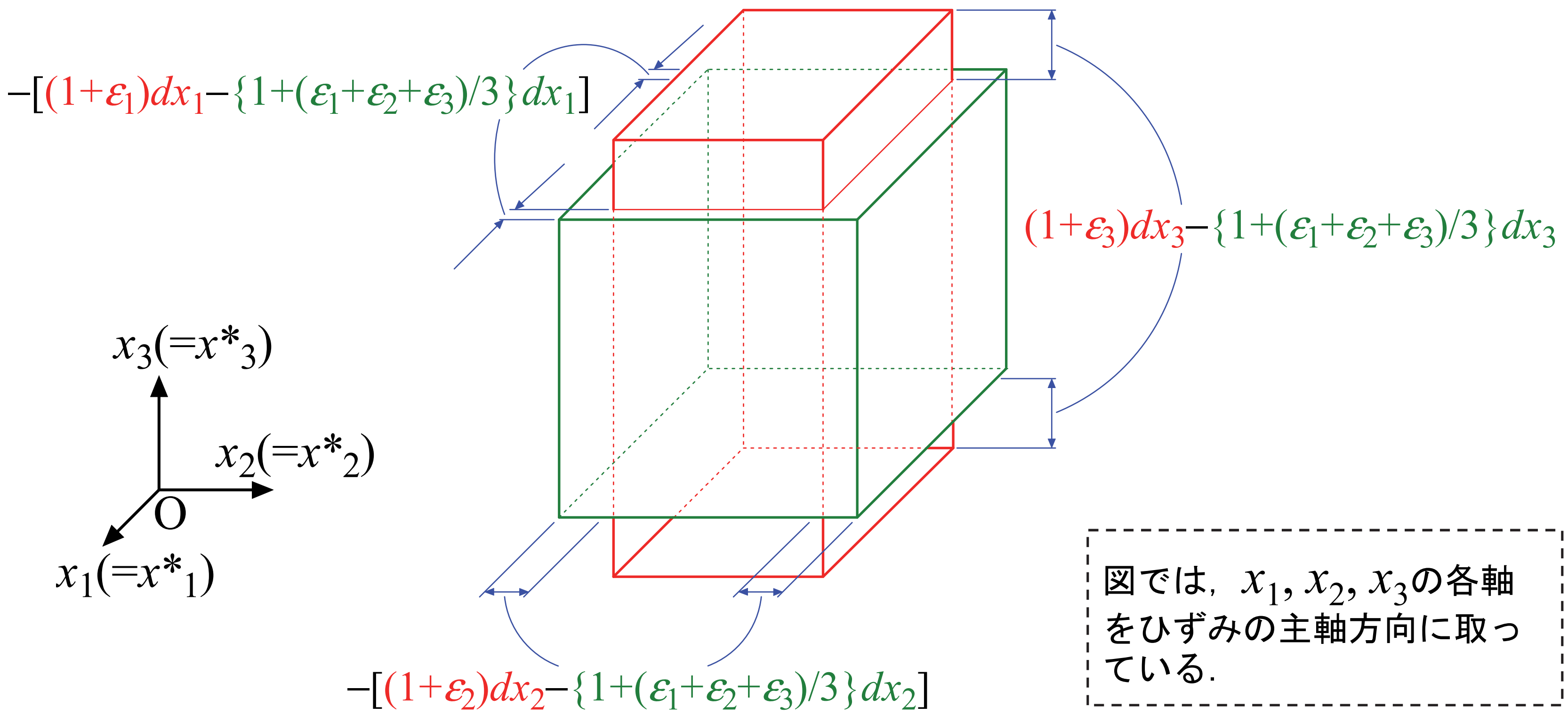
シンボリック表現

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{I}$$

展開表現

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{31} \\ \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{23} & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

各ひずみ成分の平均垂直ひずみからの偏差を表す.



図では, x_1, x_2, x_3の各軸をひずみの主軸方向に取っている.

工学ひずみ

座標

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x, y, z)$$

工学ひずみを用いると数学的扱いは不便になる.

ひずみテンソルの成分

工学ひずみ

$$\varepsilon_{11} \longrightarrow \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{22} \longrightarrow \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{33} \longrightarrow \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_{12} \xrightarrow{\times 2} \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{23} \xrightarrow{\times 2} \gamma_{yz}$$

$$\varepsilon_{31} \xrightarrow{\times 2} \gamma_{zx}$$

直交する２つの微小ベクトルの平均的な角度変化

直交する２つの微小ベクトルの全角度変化

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \left(\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12} \right)$$

ひずみの適合条件

連続な変位が得られるためにひずみ成分の間に成立しなければならない条件

変位ベクトル
（成分３個）

$$\boldsymbol{u}, u_i$$

ひずみテンソル（成分６個）

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

サンーブナンの適合条件式

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

上式は，８１個の式を表しているが，その中で独立した式は６個

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1{}^2}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3{}^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2{}^2}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3{}^2}$$

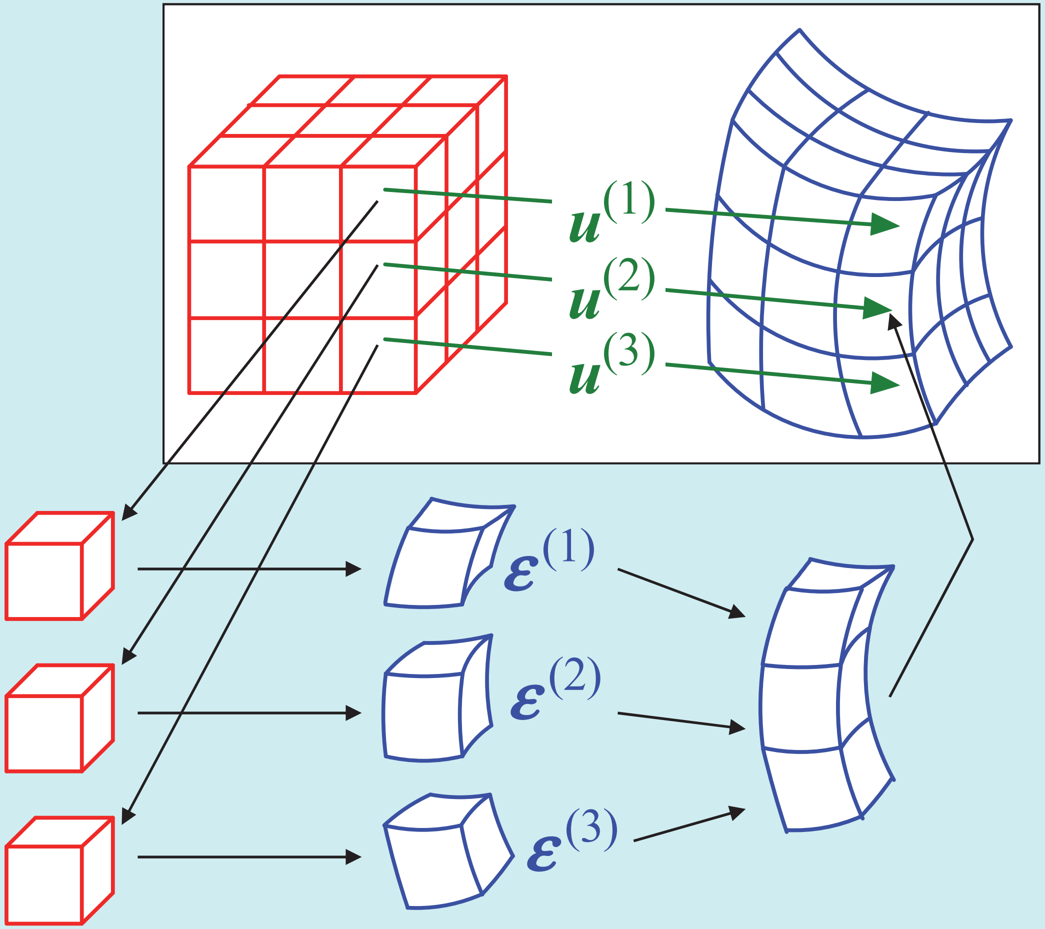
ひずみの適合条件の物理的意味

ひずみ
６成分

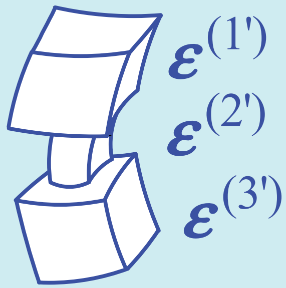
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}=\begin{bmatrix}\varepsilon^{(i)}{}_{11} & \varepsilon^{(i)}{}_{12} & \left(\varepsilon^{(i)}{}_{31}\right)\\ \left(\varepsilon^{(i)}{}_{12}\right) & \varepsilon^{(i)}{}_{22} & \varepsilon^{(i)}{}_{23}\\ \varepsilon^{(i)}{}_{31} & \left(\varepsilon^{(i)}{}_{23}\right) & \varepsilon^{(i)}{}_{33}\end{bmatrix}$$

変位
３成分

$$\boldsymbol{u}^{(i)}=\begin{bmatrix}u^{(i)}{}_{1}\\ u^{(i)}{}_{2}\\ u^{(i)}{}_{3}\end{bmatrix}$$



各微小要素に任意の６個のひずみ成分を与えて変形させても，変形後，それら微小要素を無理なく（連続体を形成するように）連結できるとは限らない．



微小要素間のすき間や重なりを無くするための条件 ＝ ひずみの適合条件

ひずみの不変量

ひずみの不変量

第１不変量

$$K_1 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$= \underbrace{\boxed{\varepsilon_1} + \boxed{\varepsilon_2} + \boxed{\varepsilon_3}}_{\text{主ひずみ}} \left(= \varepsilon_v\right)$$

第２不変量

$$K_2 = \frac{1}{2}\left(-\left(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\right)^2 + \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^2\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}\right)$$

$$= -\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}{}^2 + \varepsilon_{23}{}^2 + \varepsilon_{31}{}^2$$

$$= -\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1$$

第３不変量

$$K_3 = \det\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{rst} \varepsilon_{ir} \varepsilon_{js} \varepsilon_{kt}$$

$$= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$