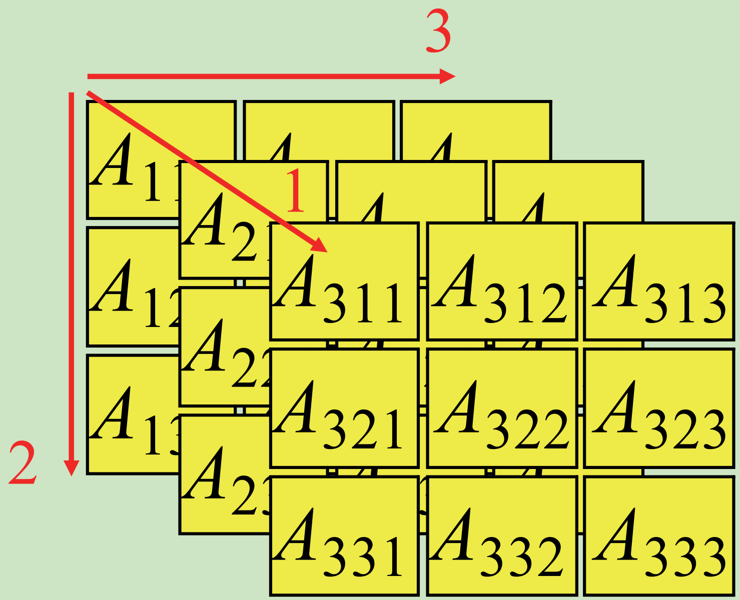
テンソル

third-order tensor



*n*th-order tensor by indicial expression

$$A'_{m_1 m_2 \cdots m_n} = Q_{m_1 k_1} Q_{m_2 k_2} \cdots Q_{m_n k_n} A_{k_1 k_2 \cdots k_n}$$

quotient rule by symbolic expression

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

contraction

$$A_{ij} \xrightarrow{i=j} A_{ii}$$

テンソル（その１）

スカラー（０階のテンソル）

a → 0 ・ a

階数

カードを並べる方向の数が階数.

１方向当たりのカードの枚数が次元.

ベクトル（１階のテンソル）

指標表現 a_i

シンボリック表現 $\boldsymbol{a}$

→

1

a_1

a_2

a_3

→

行列表現

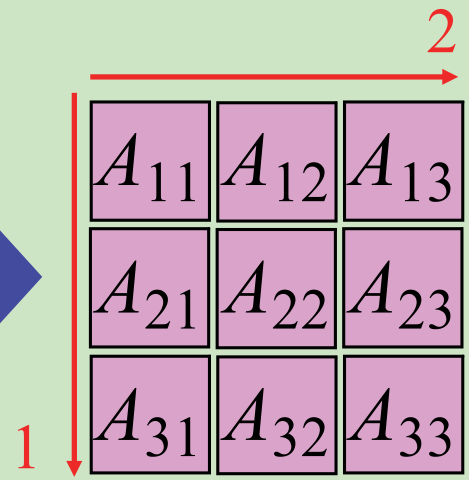
$$[a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

テンソル（その２）

２階のテンソル

指標表現 A_{ij}

シンボリック表現 $\boldsymbol{A}$



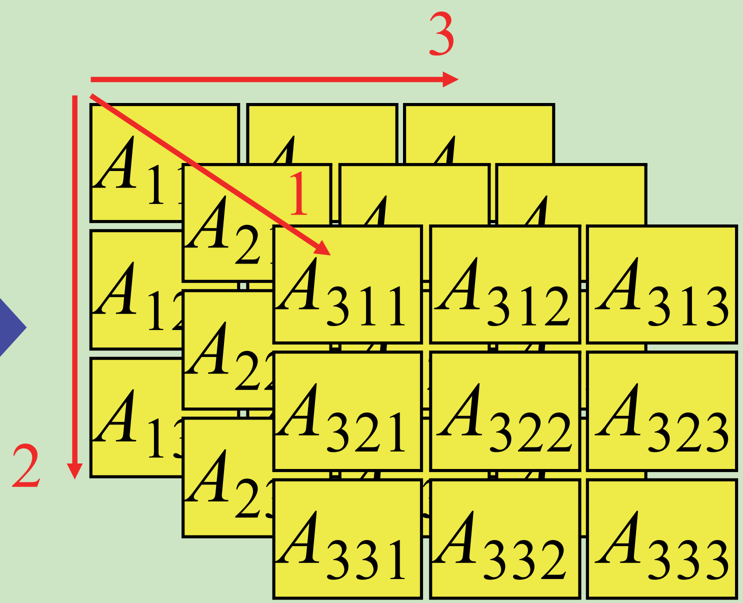
行列表現

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

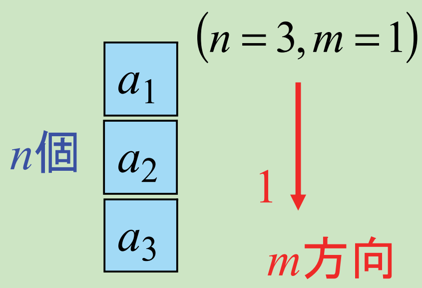
３階のテンソル

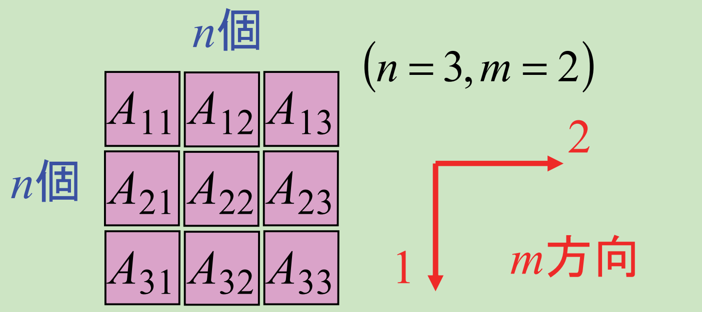
指標表現 A_{ijk}

シンボリック表現 $\boldsymbol{A}$

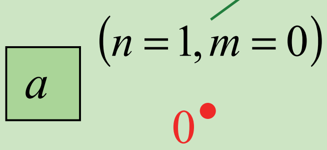


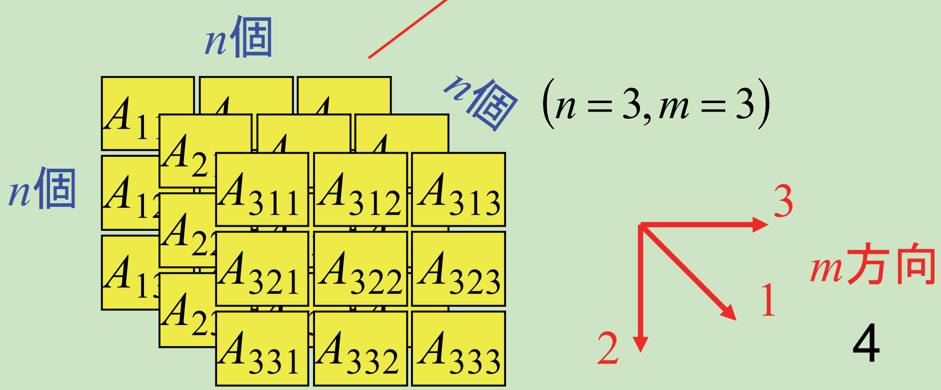
テンソルの成分数





	スカラー（0階のテンソル）	ベクトル（1階のテンソル）	テンソル（m階のテンソル）
次元　n	n (=1)	n (≥2)	n (≥2)
階数　m	0	1	2 以上
成分数	$\boxed{1}$	$\boxed{n}$	$\boxed{n^m}$





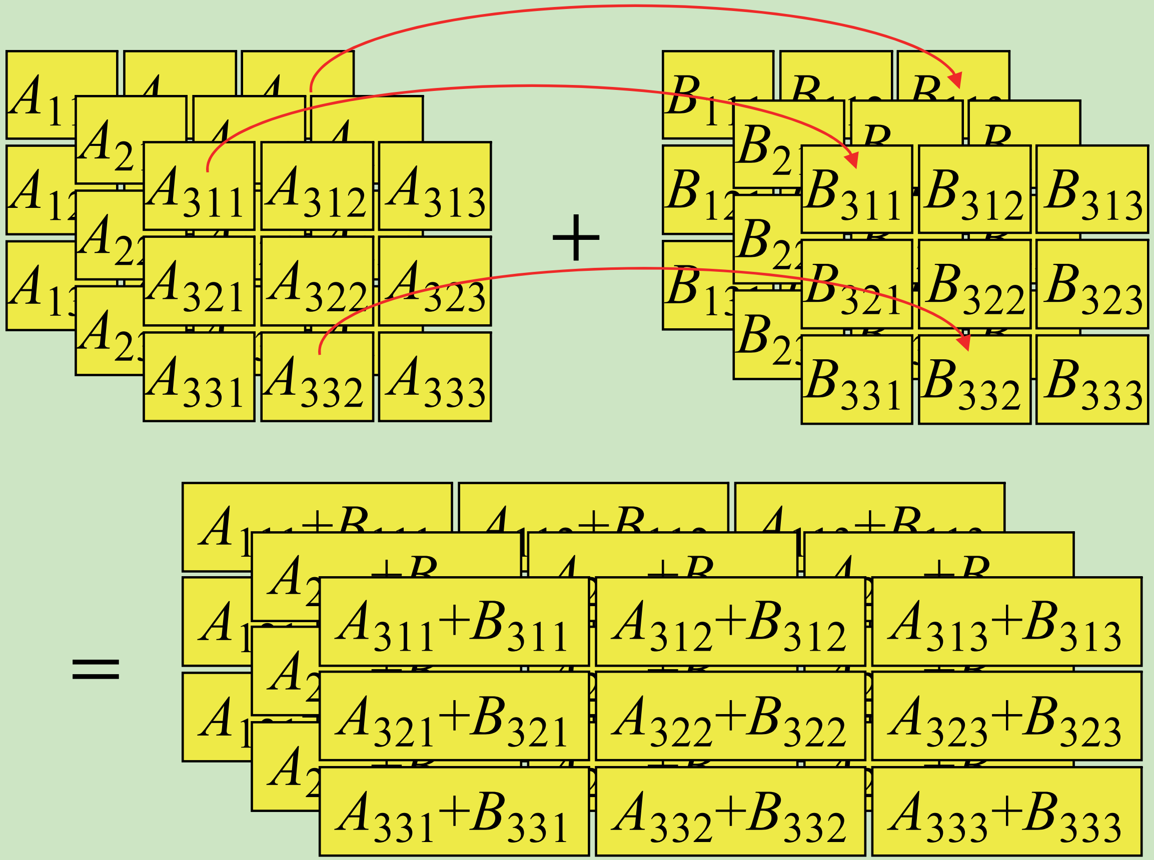
テンソルの和と差

和

指標表現 $A_{ijk} + B_{ijk}$

シンボリック表現 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

同じ階数のテンソルについてのみ和を計算することができる.



差

指標表現 $A_{ijk} - B_{ijk}$

シンボリック表現 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$

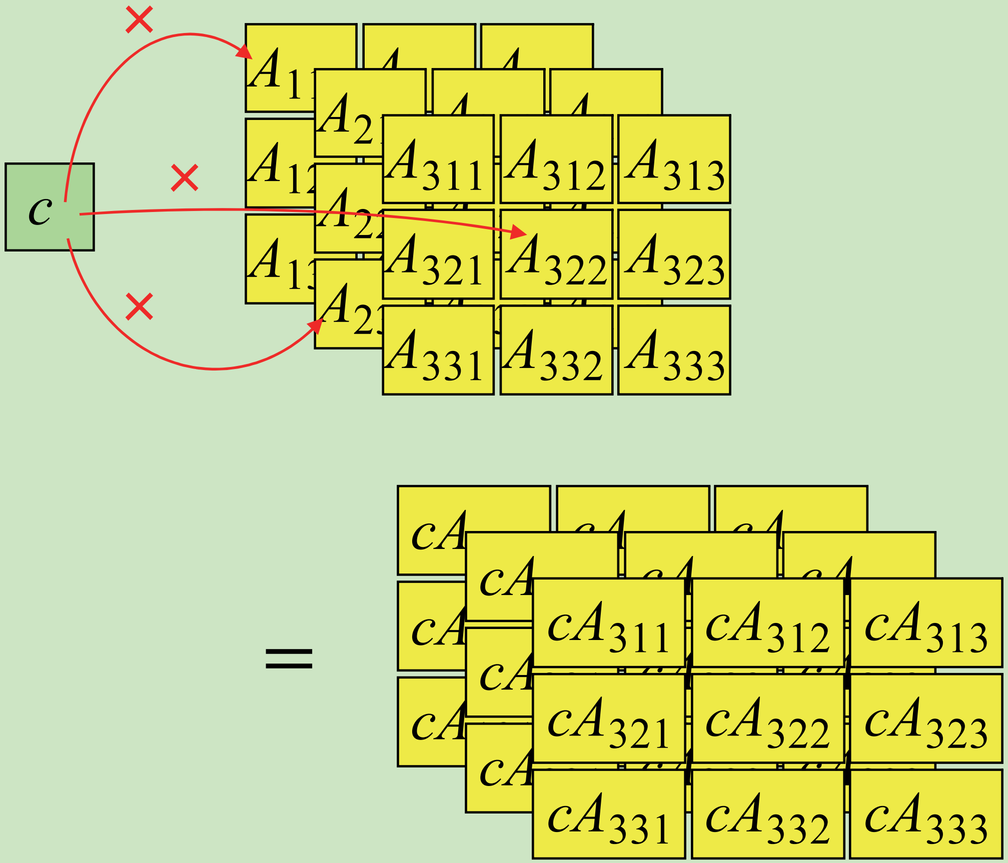
同じ階数のテンソルについてのみ差を計算することができる.

テンソルのスカラー倍

スカラー倍

指標表現 cA_{ijk}

シンボリック表現 cA



テンソルの内積（テンソル同士の積）

jについて総和を取る

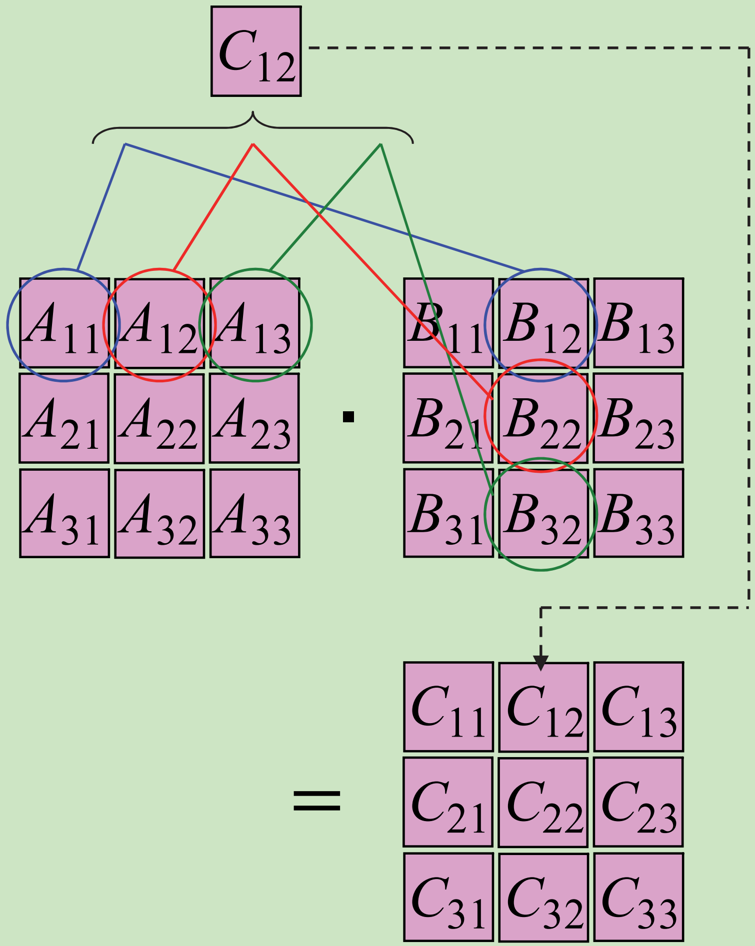
指標表現 $C_{ik} = A_{ij}B_{jk}$

シンボリック表現 $\boldsymbol{C} = \boxed{\boldsymbol{A}} \cdot \boxed{\boldsymbol{B}}$

テンソル

交換法則は成り立たない．

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\left(= \left(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B}^T\right)^T\right)$$



行列表現

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

２階のテンソル同士の内積と行列の積は形式的に等しい．

テンソルの内積（テンソル同士の積，複内積）

i と j の両方について総和を取る

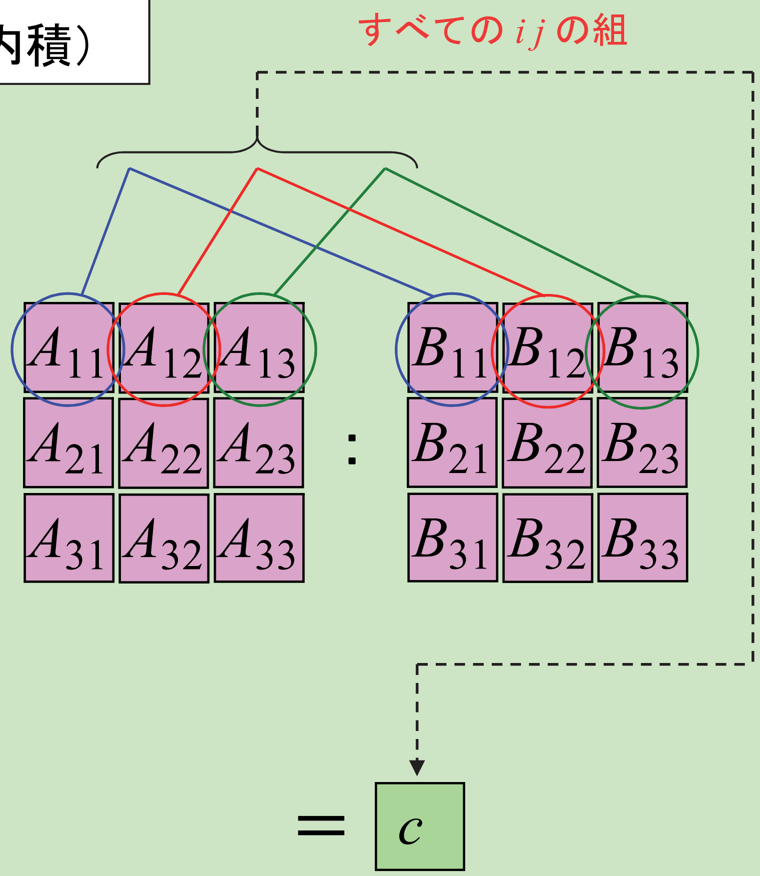
指標表現

$$c = A_{ij} B_{ij}$$

シンボリック表現

$$c = \boxed{\boldsymbol{A}} : \boxed{\boldsymbol{B}}$$

テンソル



展開表現

$$c = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + \cdots + A_{32}B_{32} + A_{33}B_{33}$$

テンソルの内積（ベクトルとテンソルの積）

iについて総和を取る　　　　jについて総和を取る

ベクトル

テンソル

指標表現

$$c_j = a_i B_{ij} \qquad\qquad c_i = A_{ij} b_j$$

シンボリック表現

$$\boldsymbol{c} = \boxed{\boldsymbol{a}} \cdot \boxed{\boldsymbol{B}} \qquad\qquad \boldsymbol{c} = \boxed{\boldsymbol{A}} \cdot \boxed{\boldsymbol{b}}$$

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \cdot \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array} \qquad \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} = \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array} \cdot \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}$$

行列表現

$$\xcancel{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}} \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

正しくは，$\boldsymbol{c} = \left(\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{B}\right)^T$

テンソル積（テンソル同士の積）

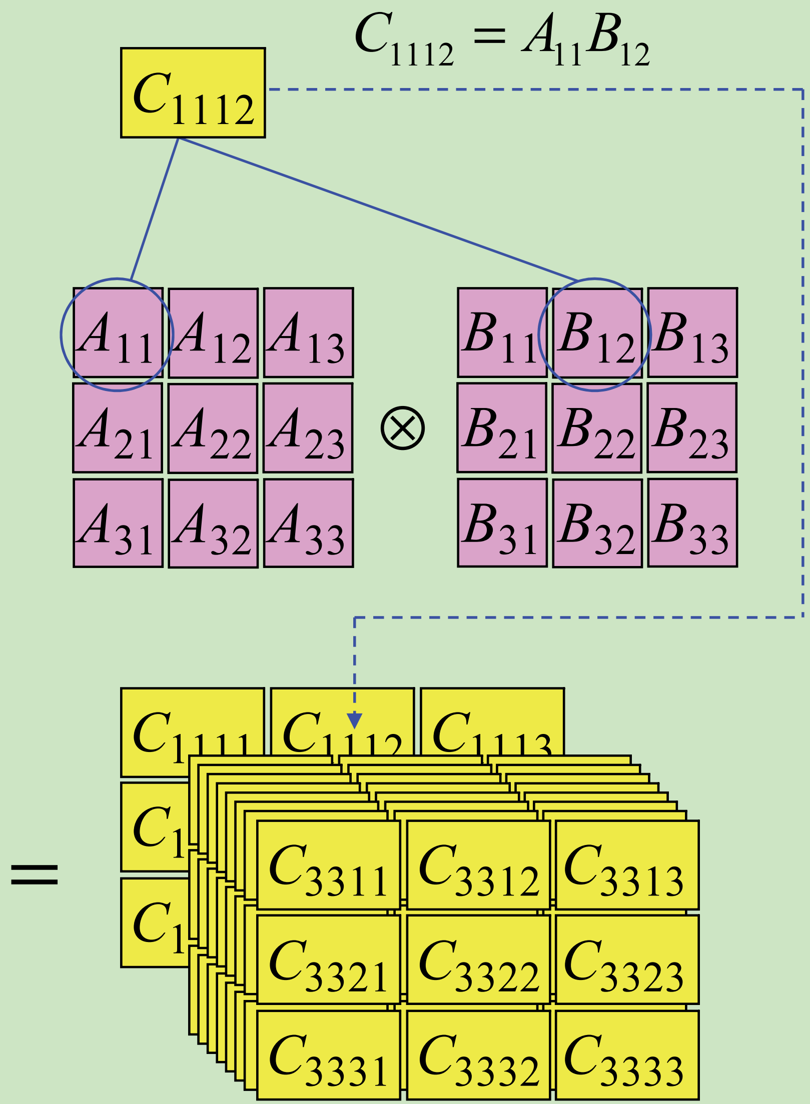
指標表現

$$C_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$$

シンボリック表現

$$\boldsymbol{C} = \boxed{\boldsymbol{A}} \otimes \boxed{\boldsymbol{B}}$$

テンソル



テンソル積によって得られた新しいテンソルの階数は，元のテンソルの階数の和になる．

テンソル積（ベクトルとテンソルの積）

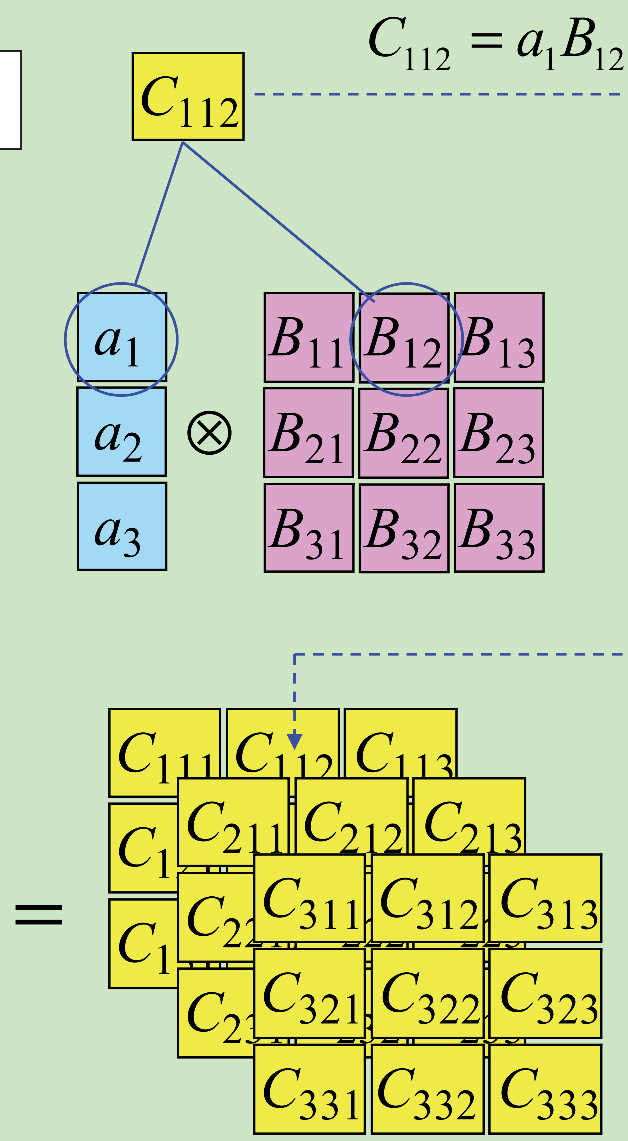
指標表現

$$C_{ijk} = a_i B_{jk}$$

シンボリック表現

$$\boldsymbol{C} = \boxed{\boldsymbol{a}} \otimes \boxed{\boldsymbol{B}}$$

ベクトル　　テンソル



２階のテンソルの成分一覧表示

固体力学では，２階のテンソル

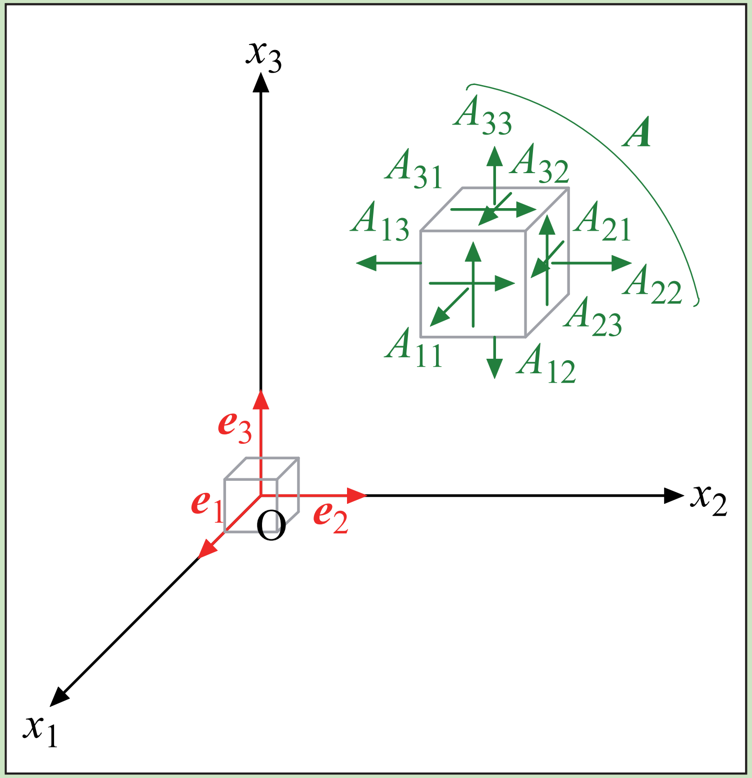
A_{11}	A_{12}	A_{13}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{31}	A_{32}	A_{33}

を取り扱うことが多い．便宜上，２階のテンソルの成分一覧を示す場合は，行列と同じ

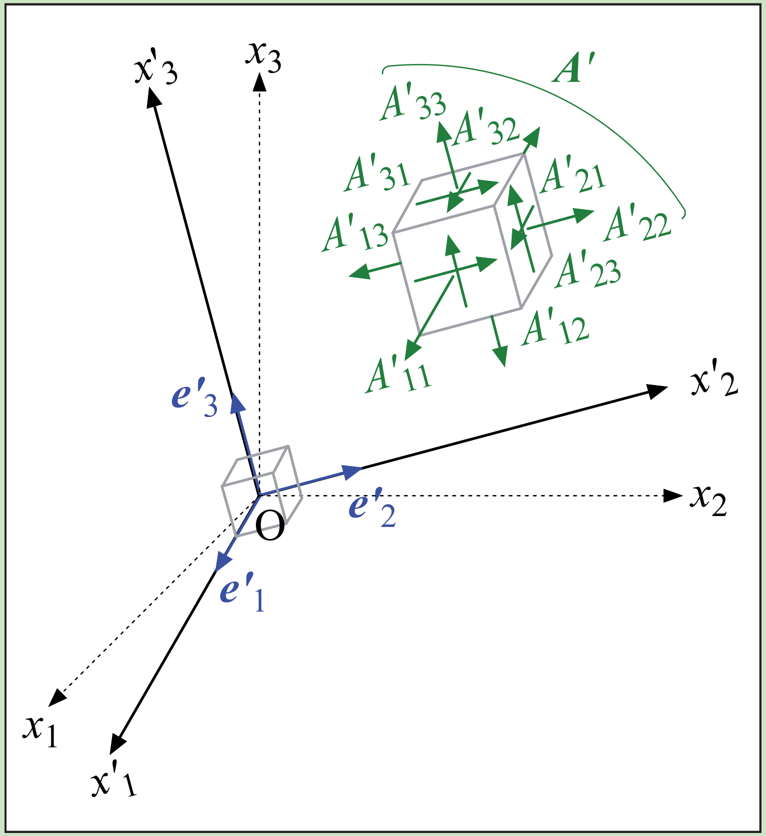
$$
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}
$$

の形式で表示することとするが，基本的に行列とテンソルは異なるものである．

座標変換とテンソル（テンソルの定義，その１）



座標変換



テンソルの定義

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
A'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} A_{kl}
$$

$$
\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} \end{bmatrix}
$$

座標変換とテンソル（テンソルの定義，その２）

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{座標変換}} \boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} \end{bmatrix}$$

指標表現

$$A'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} A_{kl}$$

シンボリック表現

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}^T$$

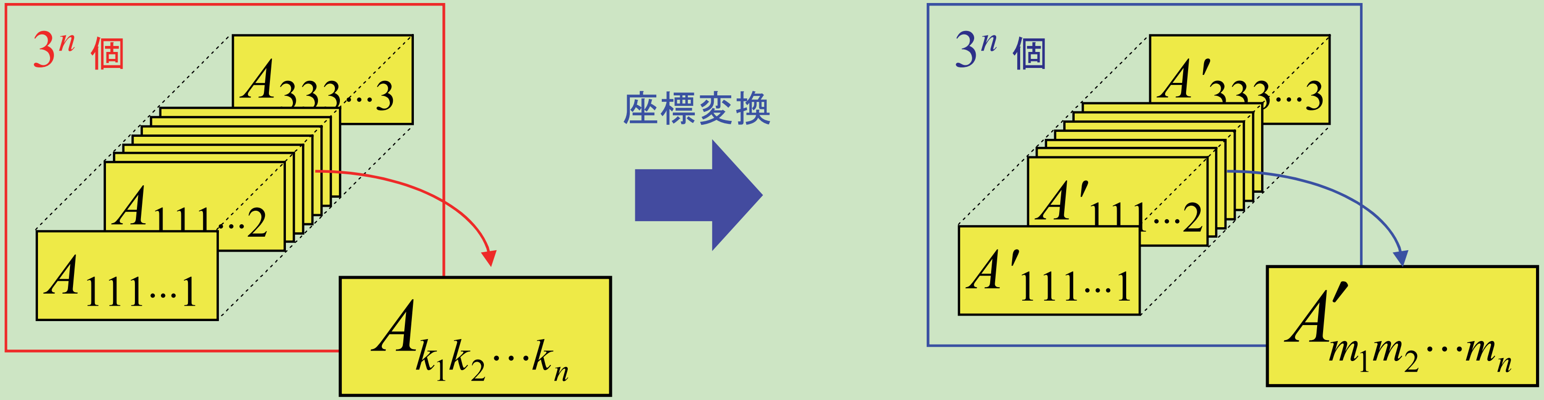
$$A'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} A_{kl} = Q_{ik} A_{kl} \left(\boldsymbol{Q}^T\right)_{lj} = \left(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}^T\right)_{ij}$$

行列表現

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T$$

$$\begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

座標変換とテンソル（n階のテンソル）



$$A_{k_1k_2\cdots k_n}\boldsymbol{e}_{k_1}\otimes\boldsymbol{e}_{k_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{k_n}$$

$$A'_{m_1m_2\cdots m_n}\boldsymbol{e}'_{m_1}\otimes\boldsymbol{e}'_{m_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}'_{m_n}$$

指標表現

$$A'_{m_1m_2\cdots m_n}=\underbrace{Q_{m_1k_1}Q_{m_2k_2}\cdots Q_{m_nk_n}}_{n\text{ 個}}A_{k_1k_2\cdots k_n}$$

$$Q_{m_ik_i}=\boldsymbol{e}'_{m_i}\cdot\boldsymbol{e}_{k_i}=\frac{\partial x'_{m_i}}{\partial x_{k_i}}$$

テンソルの成分と基底

２階のテンソル $\boldsymbol{A}$ の成分を A_{ij} とするとき，$\boldsymbol{A}$ は A_{ij} を係数とする $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ の１次結合で表される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\ &= A_{11}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + A_{12}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \cdots + A_{33}\boxed{\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3}\end{aligned}$$

基底

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = A_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + A_{33}\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

ベクトル

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i$$

３階のテンソル

$$\boldsymbol{B} = B_{ijk}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$$

対称テンソルと逆対称テンソル

$$A_{ij} = \boxed{\left(\boldsymbol{A}^S\right)_{ij}} + \boxed{\left(\boldsymbol{A}^A\right)_{ij}} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right)$$

指標表現

対称テンソル　逆対称テンソル

$$\boldsymbol{A} = \boxed{\boldsymbol{A}^S} + \boxed{\boldsymbol{A}^A} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T\right)$$

シンボリック表現

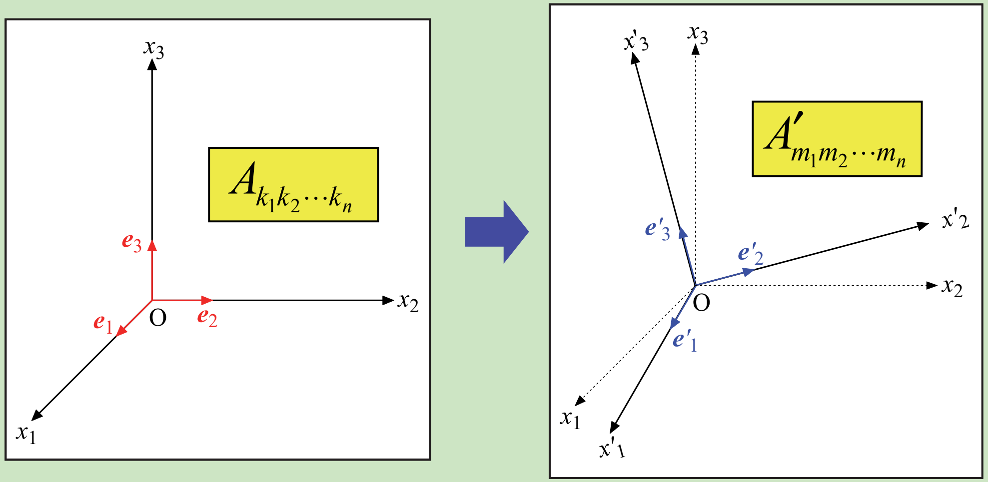
例（２階のテンソル）

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \left(\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\boldsymbol{A}^S = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

等方テンソル

座標変換に対して成分の
変わらないテンソル.



等方ベクトル（１階等方テンソル）

$$a_i = \boxed{0}$$

零ベクトル

２階等方テンソル

$$A_{ij} = \alpha\,\delta_{ij}$$

$(\alpha$: スカラー$)$

３階等方テンソル

$$A_{ijk} = \alpha\,e_{ijk}$$

$(\alpha$: スカラー$)$

４階等方テンソル

$$A_{ijkl} = \alpha\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\,\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\,\delta_{il}\delta_{jk}$$

$(\alpha, \beta, \gamma$: スカラー$)$

テンソルの主値と主軸（その１）

テンソル$\boldsymbol{A}$が応力テンソルやひずみテンソルの場合，法線ベクトルが$\boldsymbol{n}$の面における垂直応力あるいは垂直ひずみの値が$f(\boldsymbol{n})$に相当する.

$f(\boldsymbol{n})$ を２階の対称テンソル $\boldsymbol{A}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ （$=n_i\boldsymbol{e}_i$）の関数

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{n}) &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} \\
&= n_i A_{ij} n_j
\end{aligned}
$$

とするとき，$\boldsymbol{n}$ を変化させたときの $f(\boldsymbol{n})$ の極値 λ をテンソル $\boldsymbol{A}$ の主値と言う．また，

$$
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = \lambda\boldsymbol{n} \quad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = \lambda)
$$

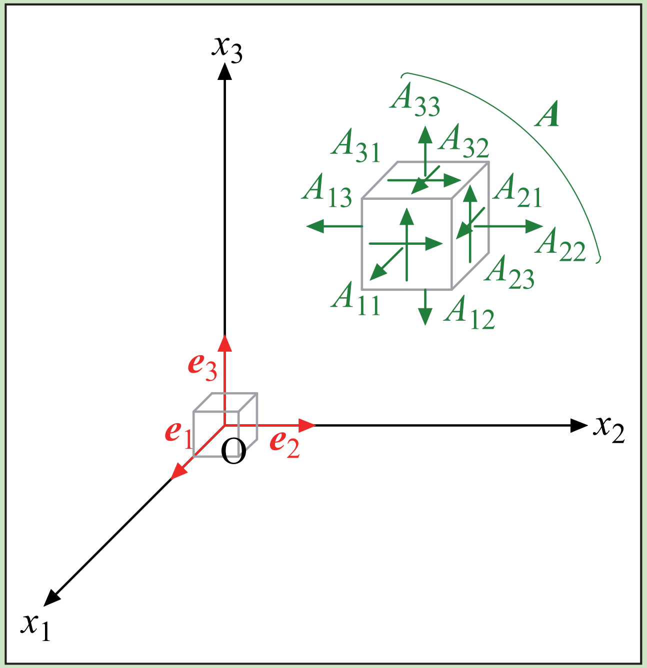
となる単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ が決定する方向をテンソル $\boldsymbol{A}$ の主軸と言う.

$\boldsymbol{A}$ が２階対称テンソルであるときは,

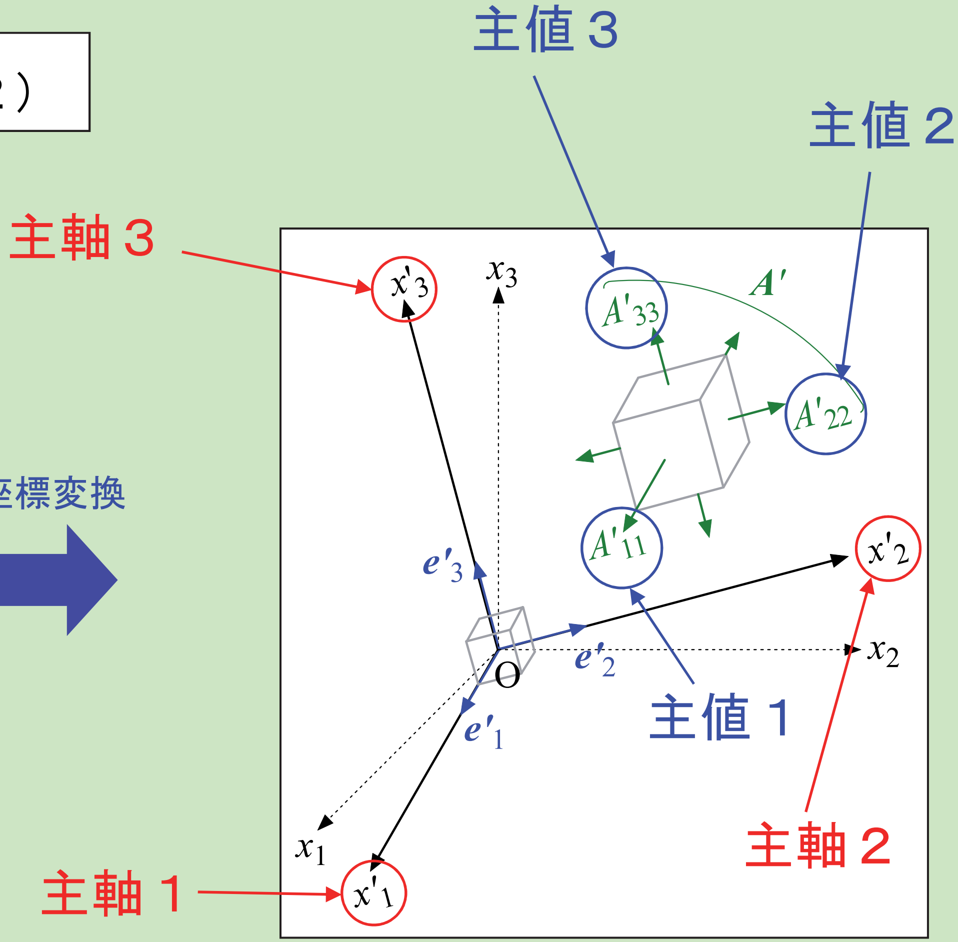
主値＝固有値（実数）
主軸＝固有ベクトルの方向（互いに垂直）

となる.

テンソルの主値と主軸（その２）



座標変換



$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
A'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} A_{kl}
$$

$\boldsymbol{Q}$：直交テンソル
（$\boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$,
$\boldsymbol{I}$：単位テンソル）

$$
\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} A'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A'_{33} \end{bmatrix}
$$

行列の対角化とテンソルの主値，主軸との関係

固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列を用いて行列は対角化される．

行列の対角化

$\boldsymbol{A}$ 対角化

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

固有ベクトル

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} n^{(1)}{}_1 & n^{(2)}{}_1 & n^{(3)}{}_1 \\ n^{(1)}{}_2 & n^{(2)}{}_2 & n^{(3)}{}_2 \\ n^{(1)}{}_3 & n^{(2)}{}_3 & n^{(3)}{}_3 \end{bmatrix}$$

行列

固有値

行列の積
＝テンソルの内積

主軸（新たな座標軸の基本ベクトル）

転置関係

主値と主軸

$\boldsymbol{A}$ 座標変換

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} n^{(1)}{}_1 & n^{(1)}{}_2 & n^{(1)}{}_3 \\ n^{(2)}{}_1 & n^{(2)}{}_2 & n^{(2)}{}_3 \\ n^{(3)}{}_1 & n^{(3)}{}_2 & n^{(3)}{}_3 \end{bmatrix}$$

テンソル

主値

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n}^{(1)} \\ \boldsymbol{n}^{(2)} \\ \boldsymbol{n}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}^{(1)} &= Q_{11}\boldsymbol{e}_1 + Q_{12}\boldsymbol{e}_2 + Q_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ &= n^{(1)}{}_1\boldsymbol{e}_1 + n^{(1)}{}_2\boldsymbol{e}_2 + n^{(1)}{}_3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

テンソルの不変量（その１）

テンソルの個々の成分は座標変換によって変化するが，座標変換によって変わらないいくつか（ n 次元の場合 n 個）のスカラー（成分の演算結果）を作ることができる．これらの量を不変量と言う．

第１不変量

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = A_{ii} \left(= A_{11} + A_{22} + A_{33}\right)$$

第２不変量

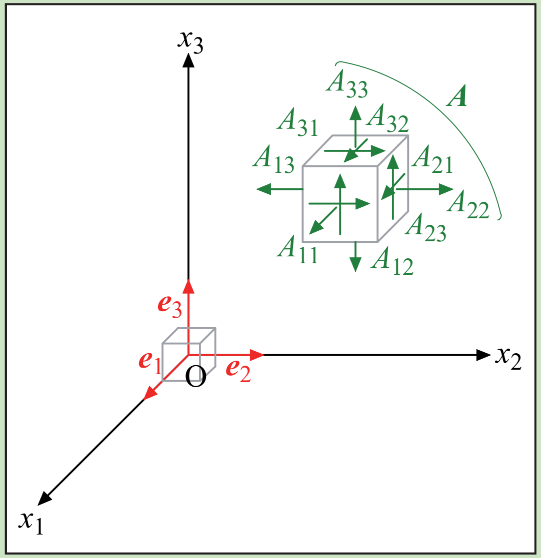
$$I_2 = \frac{1}{2}\left\{-\left(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}\right)^2 + \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^2\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(-A_{ii}A_{jj} + A_{ij}A_{ji}\right)$$

$$\left(= -A_{11}A_{22} - A_{22}A_{33} - A_{33}A_{11} + A_{12}A_{21} + A_{23}A_{32} + A_{31}A_{13}\right)$$

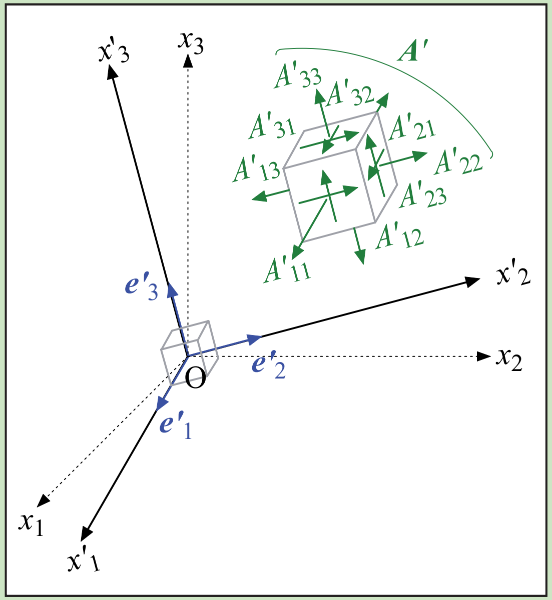
第３不変量

$$I_3 = \det \boldsymbol{A} \left(= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt}$$

テンソルの不変量（その２）



座標変換



A_{ij} → 変化 → $A'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} A_{kl}$

I_1　I_2　I_3 → 不変 → I_1　I_2　I_3

縮約（その１）

縮約とは，テンソルの成分の２つの添字（自由指標）を等しいとおいて（自由指標→擬指標），それらについて和をとる操作である．縮約によって，テンソルの階数は２階低くなる．

例１

$$\boxed{A_{ij}} \xrightarrow[(\,i=j\,)]{\text{縮約}} \boxed{A_{ii}}$$

２階のテンソル

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

０（＝２－２）階のテンソル（スカラー）

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$$

縮約（その２）

例２　$\boxed{\text{内積}} = \boxed{\text{テンソル積}} + \boxed{\text{縮約}}$

１階のテンソル
（ベクトル）×２

$\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{b}$

テンソル積

２（＝１＋１）階のテンソル

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

縮約

０（＝２－２）階のテンソル（スカラー）

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

縮約（その３）

例３　複内積 ＝ テンソル積 ＋ $\underbrace{\text{縮約} + \text{縮約}}_{２回}$

$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}$

２階のテンソル×２

$$\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B} \xrightarrow{\text{テンソル積}} A_{ij}B_{kl} \xrightarrow[(k=i)]{\text{縮約}} A_{ij}B_{il} \xrightarrow[(l=j)]{\text{縮約}} A_{ij}B_{ij}$$

４（＝２＋２）階の
テンソル

２（＝４－２）階の
テンソル

０（＝２－２）階の
テンソル（スカラー）

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + \cdots + A_{33}B_{33}$$

ドットの個数は，テンソル積を
取った後の縮約の回数を表す

（参考）４階のテンソルの４重内積

$$\boldsymbol{A}::\boldsymbol{B} = A_{1111}B_{1111} + A_{1112}B_{1112} + \cdots + A_{3333}B_{3333}$$

$A_{ijkl}B_{ijkl}$

商法則

ある量 $\boldsymbol{X}$ と任意のテンソルとの内積がテンソルであるならば，$\boldsymbol{X}$ はテンソルである.

$$\boldsymbol{X}\cdot\boxed{\boldsymbol{A}}=\boxed{\boldsymbol{B}}$$

n階のテンソル

m階のテンソル

$\boldsymbol{X}$ の階数 k

$$k+m-2=n$$

テンソル場の勾配（微分）

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \otimes \nabla$$
$$= \nabla_k A_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$$
$$= \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$$

$\operatorname{grad} \boldsymbol{A} \left(= \nabla_k A_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \right)$

は，３階のテンソルであるから，座標変換において

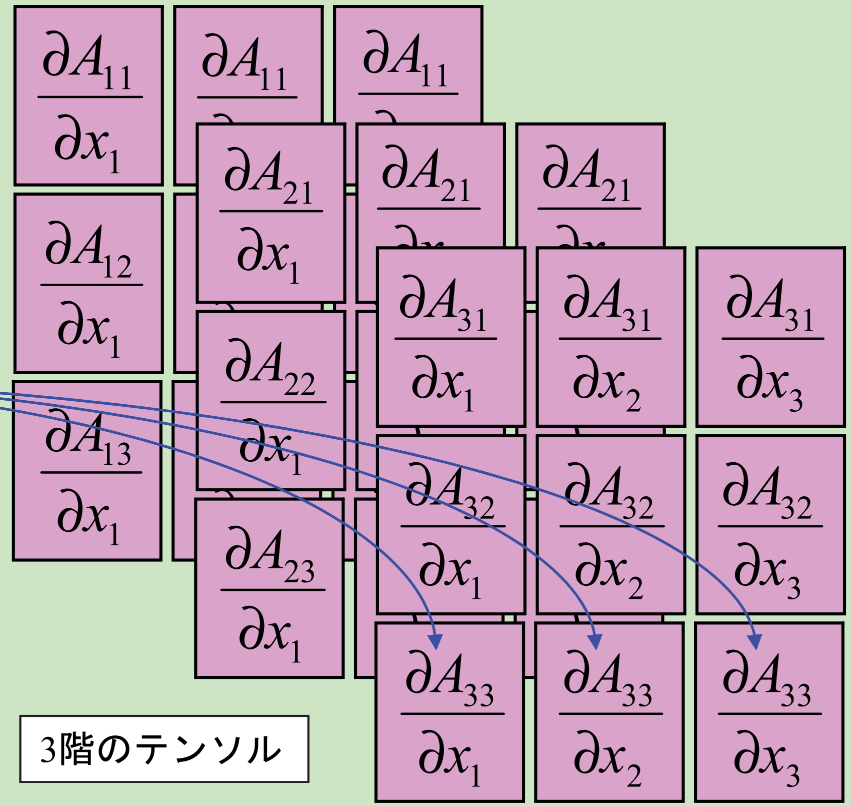
$$\nabla'_r A'_{pq} = Q_{rk} Q_{pi} Q_{qj} \nabla_k A_{ij}$$

を満たす．

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}$$

2階のテンソル

勾配



3階のテンソル

任意のテンソルを微分すると，階数が１階増加する．

正確には，この勾配を右形の勾配と言う．
左形は，$\nabla \otimes \boldsymbol{A} = \nabla_i A_{jk} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$ ．

ガウスの発散定理（その１）

面積分 ⇔ 体積分

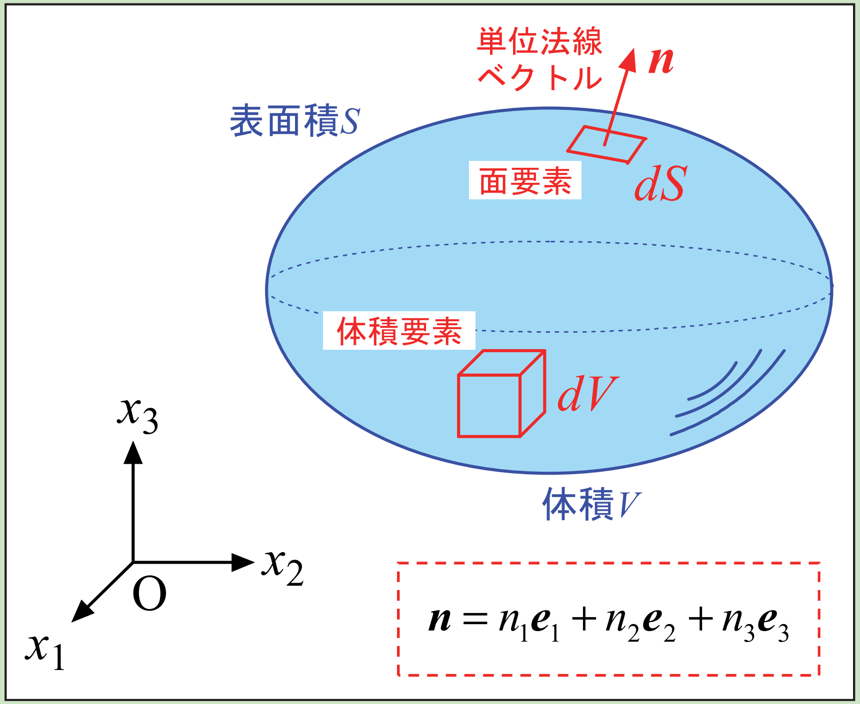
スカラー場 a

$$\iint_S a n_i dS = \iiint_V \frac{\partial a}{\partial x_i} dV \left(= \iiint_V \nabla_i a \, dV \right)$$

指標表現

$$\iint_S a\boldsymbol{n} dS = \iiint_V \nabla a \, dV$$

シンボリック表現



ベクトル場 $\boldsymbol{a}$

$$\iint_S a_i n_i dS = \iiint_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV \left(= \iiint_V \nabla_i a_i dV \right)$$

指標表現

$$\iint_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{a} dV \left(= \iiint_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{a} dV \right)$$

シンボリック表現

ガウスの発散定理（その２）

２階のテンソル場 A

右形の発散

$$\iint_S A_{ij} n_j dS = \iiint_V \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} dV \left(= \iiint_V \boxed{\nabla_j A_{ij}} dV \right)$$

指標表現

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \boxed{\boldsymbol{A} \cdot \nabla} dV$$

シンボリック表現

左形の発散

$$\iint_S A_{ij} n_i dS = \iiint_V \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} dV \left(= \iiint_V \boxed{\nabla_i A_{ij}} dV \right)$$

指標表現

$$\iint_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A} dS = \iiint_V \boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A}} dV$$

シンボリック表現

ストークスの定理

面積分 $\Leftrightarrow$ 線積分

ベクトル場 $\boldsymbol{a}$

$$\iint_S e_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}n_i dS = \int_C a_i dx_i$$

指標表現

$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\cdot \boxed{\boldsymbol{n}dS} = \int_C \boldsymbol{a}\cdot \boxed{\boldsymbol{t}ds}$$

シンボリック表現

面要素ベクトル　$d\boldsymbol{S}$

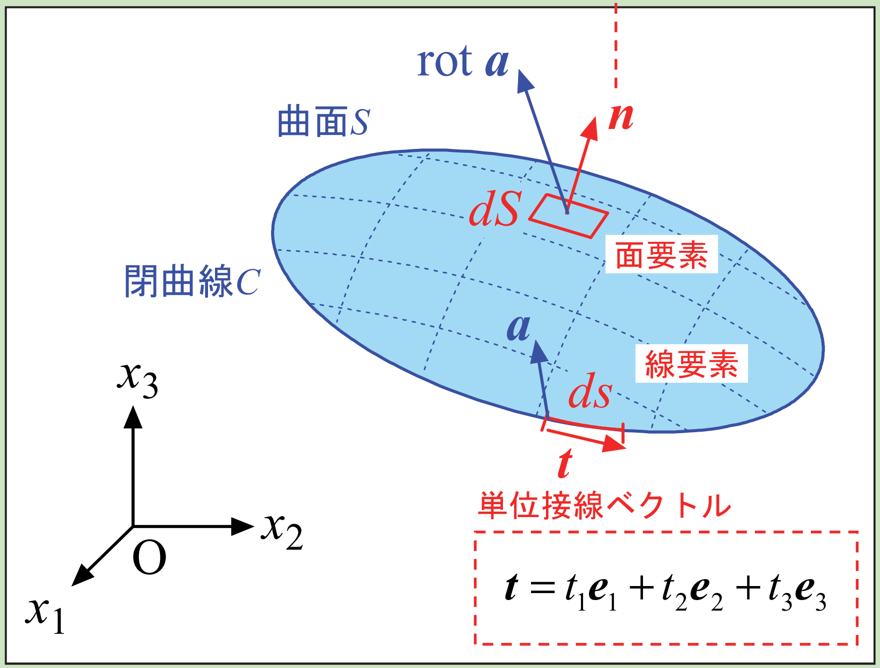
大きさがdSで向きが
面の法線方向である
ベクトル

線要素ベクトル　$d\boldsymbol{s}$

大きさがdsで向きが
線の接線方向である
ベクトル

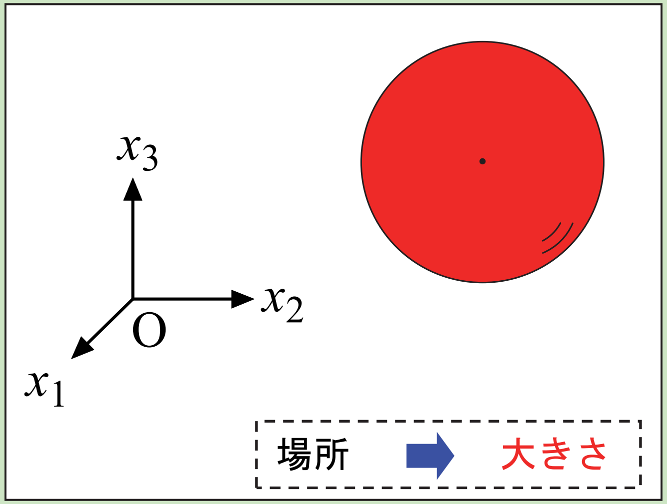
単位法線ベクトル

$$\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2 + n_3\boldsymbol{e}_3$$

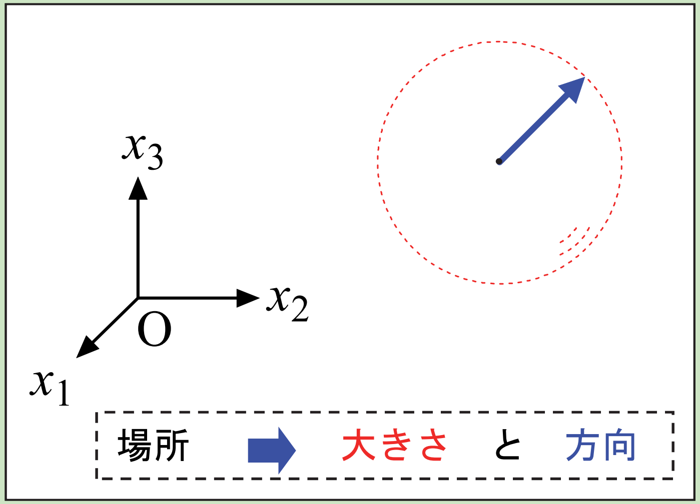


スカラー場とベクトル場とテンソル場

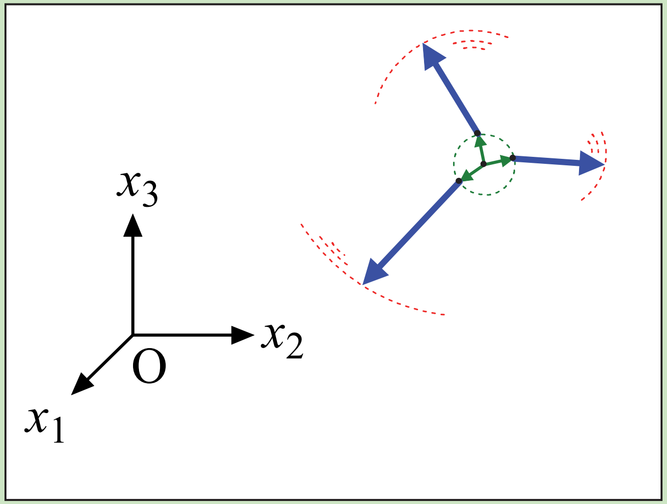
スカラー場



ベクトル場



テンソル場



場所 ➡ 方向毎 の 大きさ と 方向
（場所 と 方向 ➡ 大きさ と 方向）